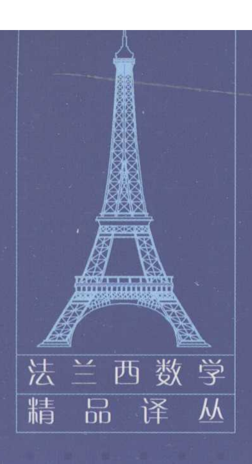


法兰西数学
精品译丛

解析函数论初步

□ H. 嘉当 著
□ 余家荣 译



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

本书是H. 嘉当根据他于二十世纪五十年代后期到六十年代初期在巴黎大学理学院所授复变解析函数课程编写的。包含了单复变函数一些经典的理论，也介绍了多复变函数的解析性和全性，是一本非常经典的解析函数论入门教程。该书先讲收敛幂级数，后讲可导函数及积分，精确地引进了解析空间和黎曼面等概念，讲述了多复变解析函数的概念，在使用工具方面，引进了拓扑及抽象代数中的一些概念。书中还包括很多练习。

原书已被翻译成中、日、英、俄等多国文字，至今仍为法国各大学复变函数课程主要参考书。

本书可供我国数学专业及相关专业的研究生、教师参考。

学科类别：数学

academic.hep.com.cn



数学天元基金资助项目

解析函数论初步

□ H. 嘉当 著
□ 余家荣 译

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

法兰西数学精品译丛

书名	作者
*解析函数论初步	H. 嘉当
微分学	H. 嘉当
广义函数论	L. 施瓦尔兹
微分几何	M. 伯杰 B. Gostiaux
拓扑学教程	G. 肖盖
代数教程	R. 戈德曼
谱分析	J. 迪斯米埃
拟微分算子	Serge ALINHAC Patrick G′ ERARD
解析数论	Gérald Tenenbaum
概率与位势	Claude Dellacherie Paul-Andre Meyer

说明: 此为第一批书单, 加*者已经出版.

郑重声明

《法兰西数学精品译丛》编委会

目录

第一章　单变量幂级数

§1. 形式幂级数

1. 多项式代数

设 K 为一交换域. 考虑一个字母 (或 "未知量") X 的形式多项式, 其系数在 K 中 (暂时还谈不上给出 X 的值). 考虑两多项式相加及一多项式乘以一个 "纯量" (即乘以 K 中一元素) 这两种运算, 可使多项式集 $K[X]$ 成为一个 K 上的**向量空间**, 其无穷基为

$$1,\ X,\ \cdots,\ X^n,\ \cdots.$$

每个多项式是 X^n 的一个有限线性组合, 其系数在 K 中, 并且可写作 $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n X^n$, 这里约定系数 a_n 的无穷序列中除去有限个外全为零. 由乘法表

$$X^p \cdot X^q = X^{p+q}$$

可定义在 $K[X]$ 中的乘法, 乘积

$$\left(\sum_p a_p X^p\right) \cdot \left(\sum_q b_q X^q\right)$$

为 $\sum\limits_n c_n X^n$, 其中

$$c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q. \tag{1.1}$$

这种乘法满足交换律和结合律. 它还是双线性的, 亦即无论怎样的多项式 P, P_1, P_2, Q 及纯量 λ,

$$\begin{cases} (P_1+P_2)\cdot Q = P_1Q + P_2Q, \\ (\lambda P)\cdot Q = \lambda\cdot(PQ). \end{cases} \tag{1.2}$$

这种乘法以多项式 $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n X^n$ 作为单位元素 (记作 1), 其中 $a_0 = 1$, 并且对于 $n > 0$, $a_n = 0$. 为了表述所有这些性质, 我们说 $K[X]$ 加上其向量空间结构及其乘法, 就是在域 K 上具有单位元素的一个**交换代数**; 特别, 这是一个有单位元素的交换环.

2. 形式级数代数

X 的形式幂级数是形式表达式 $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n X^n$, 在这里我们不必再设系数 a_n 除去其中有限个外都为零. 我们定义两个形式级数的和为

$$\left(\sum_{n\geqslant 0} a_n X^n\right) + \left(\sum_{n\geqslant 0} b_n X^n\right) = \sum_{n\geqslant 0} c_n X^n, \quad \text{其中 } c_n = a_n + b_n,$$

还定义形式级数与纯量的积为

$$\lambda\left(\sum_{n\geqslant 0} a_n X^n\right) = \sum_{n\geqslant 0} (\lambda a_n) X^n.$$

这样, 形式级数的集 $K[[X]]$ 形成在 K 上的一个向量空间. 我们用 0 记加法的零元素; 它就是系数全为零的形式级数.

两个形式级数的积仍由公式 (1.1) 定义, 这公式还有意义是由于其右边只有有限项相加. 乘法还满足交换律及结合律, 并且对于向量空间的结构是双线性的. 这样, $K[[X]]$ 是在域 K 上的代数, 其单位元素 (记作 1) 为级数 $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n X^n$, 其中 $a_0 = 1$, 而对 $n > 0$, $a_n = 0$.

代数 $K[X]$ 是 $K[[X]]$ 的一个子代数, 即只有有限个系数不为零的形式级数的代数.

3. 形式级数的阶

设 $S(X) = \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n X^n$. 为了简单起见, 把它记作 S. 这级数的**阶** $\omega(S)$ 是一整数, 并且只有在 $S \neq 0$ 时有定义: 它是使 $a_n \neq 0$ 的最小的 n. 如果一个形式幂级数 S 是 0, 或者如果 $\omega(S) \geqslant k$, 那么我们说 S 的阶 $\geqslant k$. 虽然当 $S = 0$ 时, $\omega(S)$ 没有定义, 可是为了方便起见, 我们仍然写 $\omega(S) \geqslant k$.

注意 我们可约定 $\omega(0)=+\infty$. 满足 $\omega(S)\geqslant k$ (k 是已给整数) 的 S 就是这样的级数 $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n X^n$, 当 $n<k$ 时, $a_n=0$. 它们组成 $K[[X]]$ 的一个子向量空间.

定义 已给形式幂级数族 $(S_i(X))_{i\in I}$, 其中 I 表示一个附标集. 如果对于任何整数 k, 除了对于有限个附标 i 外, 我们有 $\omega(S_i)\geqslant k$, 那么 $(S_i(X))_{i\in I}$ 称为**可和的**. 一族形式幂级数

$$S_i(X)=\sum_{n\geqslant 0} a_{n,i}X^n$$

的**和**定义为级数

$$S(X)=\sum_{n\geqslant 0} a_n X^n,$$

其中对于每个 $n, a_n=\sum\limits_i a_{n,i}$. 因为根据假设, 对于给定的 n, 除了对于 i 的有限个值外, $a_{n,i}$ 为零, 所以上述和式有意义. 形成可和族的形式幂级数的加法运算, 推广了由 $K[[X]]$ 的向量结构所确定的有限个形式幂级数的加法. 这种广义加法满足交换律及结合律, 其意义请读者精确叙述.

由可和族概念可以回过头来说明形式记号 $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n X^n$ 是合适的. 事实上, 我们约定把对于 $n\neq p$, 满足 $a_n=0$ 的形式级数 $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n X^n$ 称为 p 次**单项式**, 并把它记作 $a_p X^p$. 单项式族

$$\{a_n X^n\}_{n\in N}$$

(N 表示 $\geqslant 0$ 的整数集) 显然是可和的, 它的和就是形式级数 $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n X^n$.

注意 两形式幂级数的积 (乘积)

$$\left(\sum_p a_p X^p\right)\cdot\left(\sum_q b_q X^q\right)$$

就是一可和族的和, 这族是由所有下列形状的积组成的:

$$(a_p X^p)\cdot(b_q X^q)=(a_p b_q)X^{p+q},$$

其中第一个及第二个乘式分别是第一个及第二个级数中的单项式.

命题 3.1 环 $K[[X]]$ 是一整环 (这就是说, 从 $S\neq 0$ 及 $T\neq 0$ 可推出 $ST\neq 0$).

证明 设 $S(X)=\sum\limits_p a_p X^p$ 及 $T(X)=\sum\limits_q b_q X^q$ 不为零. 设 $p_0=\omega(S), q_0=\omega(T)$; 设

$$S(X)\cdot T(X)=\sum_n c_n X^n.$$

我们显然有: 对于 $n < p_0 + q_0, c_n = 0, c_{p_0+q_0} = a_{p_0} b_{q_0}$. 因为 K 是一个域, 并且 $a_{p_0} \neq 0, b_{q_0} \neq 0$, 所以我们有 $c_{p_0+q_0} \neq 0$, 从而 $S \cdot T$ 不为零. 我们还证明了: 对于 $S \neq 0, T \neq 0$, 有

$$\omega(ST) = \omega(S) + \omega(T). \tag{3.1}$$

注意 我们可以考虑形式级数, 其系数在具有单位元素的交换环 A 内, 而不必在域 K 内. 用上述方法也可证明: *如果 A 是整环, 那么 $A[[X]]$ 也是整环.*

4. 一个形式级数代入另一形式级数

考虑两个形式级数

$$S(X) = \sum_{n \geqslant 0} a_n X^n, \quad T(Y) = \sum_{p \geqslant 0} b_p Y^p.$$

假定 (*这是主要的*) $b_0 = 0$, 换句话说, $\omega(T) \geqslant 1$. 相应于每一单项式 $a_n X^n$, 作形式级数 $a_n (T(Y))^n$; 这个式子之所以有意义, 是由于 Y 的形式级数形成一个代数. 因为 $b_0 = 0$, 所以 $a_n(T(Y))^n$ 的阶 $\geqslant n$; 从而 $a_n(T(Y))^n$ 的族 (当 n 取值 $0, 1, \cdots$ 时) 是*可和的*, 并且我们可以考虑形式级数

$$\sum_{n \geqslant 0} a_n (T(Y))^n, \tag{4.1}$$

其中含 Y 的各项要重新组合. 这个 Y 的形式级数称为在 $S(X)$ 中用 $T(Y)$ **代换** X 而得, 把它记作 $S(T(Y))$; 如果不指定未知量的名称 Y, 也可把它记作 $S \circ T$. 请读者证明下列关系式:

$$\begin{cases} (S_1 + S_2) \circ T = S_1 \circ T + S_2 \circ T, \\ (S_1 S_2) \circ T = (S_1 \circ T)(S_2 \circ T), \ 1 \circ T = 1. \end{cases} \tag{4.2}$$

但要注意 $S \circ (T_1 + T_2)$ 一般不等于 $S \circ T_1 + S \circ T_2$.

关系式 (4.2) 表明, 对于给定的 T (其阶 $\geqslant 1$), 映射 $S \to S \circ T$ 是从环 $K[[X]]$ 到环 $K[[Y]]$ 的一个同态, 它把单位元素 1 变成 1.

注意 如果在 $S(X) = \sum\limits_{n \geqslant 0} a_n X^n$ 中代入零, 我们就得到只含 "常数项" 的形式级数 a_0.

如果有形式级数 S_i 的可和族, 并且如果 $\omega(T) \geqslant 1$, 那么 $S_i \circ T$ 的族也是可和的, 并且有

$$\left(\sum_i S_i \right) \circ T = \sum_i (S_i \circ T), \tag{4.3}$$

这推广了 (4.2) 中第一个关系式, 实际上, 设

$$S_i(X) = \sum_{n \geqslant 0} a_{n,i} X^n,$$

我们有

$$\sum_i S_i(X) = \sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_i a_{n,i}\right) X^n,$$

由此得

$$\left(\sum_i S_i\right)\circ T = \sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_i a_{n,i}\right)(T(Y))^n, \tag{4.4}$$

而

$$\sum_i S_i \circ T = \sum_i \left(\sum_{n\geqslant 0} a_{n,i}(T(Y))^n\right). \tag{4.5}$$

要证明 (4.4) 及 (4.5) 的右边相等, 我们注意, 在两式中, Y 的任一乘幂的系数只含有限个 $a_{n,i}$, 然后只需应用域 K 中 (有限) 加法的结合律.

命题 4.1 只要 $\omega(T)\geqslant 1$, $\omega(U)\geqslant 1$, 我们有关系式

$$(S\circ T)\circ U = S\circ(T\circ U) \quad \text{(代换的结合律)}. \tag{4.6}$$

证明 (4.6) 的两边有意义. 由 (4.2) 中第二个关系式, 对 n 递推可得

$$T^n\circ U = (T\circ U)^n. \tag{4.7}$$

因此当 S 是单项式时, (4.6) 的两边相等.

由此, 并且把级数 S 看作 (无穷个) 单项式的和 $\sum\limits_n a_n X^n$, 可推出 (4.6) 在一般情况下成立: 由定义, 我们有

$$S\circ T = \sum_{n\geqslant 0} a_n T^n,$$

又由 (4.3), 有

$$(S\circ T)\circ U = \sum_{n\geqslant 0} a_n (T^n\circ U);$$

而由 (4.7), 上式右边等于

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n (T\circ U)^n = S\circ(T\circ U).$$

证完.

5. 形式级数的倒级数

在环 $K[[Y]]$ 中, 我们有恒等式

$$(1-Y)(1+Y+\cdots+Y^n+\cdots) = 1, \tag{5.1}$$

其证明不难作出. 因此级数 $1-Y$ 在 $K[[Y]]$ 中有逆元素, 称为它的**倒级数**.

命题 5.1　要使 $S(X)=\sum\limits_n a_nX^n$ 对于 $K[[X]]$ 的乘法有逆元素, 必须而且只需 $a_0\neq 0$, 亦即 $S(0)\neq 0$.

证明　条件是必要的, 因为如果

$$T(X)=\sum_n b_nX^n \quad 并且 \quad S(X)T(X)=1,$$

我们有 $a_0b_0=1$, 从而 $a_0\neq 0$. 相反地, 假定 $a_0\neq 0$, 我们要证明 $(a_0)^{-1}S(X)=S_1(X)$ 有一逆元素 $T_1(X)$, 从而可推出 $S(X)$ 有逆元素 $(a_0)^{-1}T_1(x)$. 可是

$$S_1(X)=1-U(X). \quad \omega(U)\geqslant 1;$$

因此我们可在关系式 (5.1) 中用 $U(X)$ 代替 Y, 从而 $1-U(X)$ 有一逆元素. 证完.

注意　我们已经把多项式代数 $K[X]$ 开拓成形式级数代数 $K[[X]]$. 可以看出, 任何满足 $Q(0)\neq 0$ 的多项式 $Q(X)$ 在环 $K[[X]]$ 中有逆元素, 因此这环包含所有商式 $P(X)/Q(X)$, 其中 P 及 Q 是多项式, 而且 $Q(0)\neq 0$.

6. 形式级数的导数

设 $S(X)=\sum\limits_n a_nX^n$. 作为定义, **导级数** $S'(X)$ 由下列公式给出:

$$S'(X)=\sum_{n\geqslant 0} na_nX^{n-1}. \tag{6.1}$$

我们也可把导数 S' 写作 $\dfrac{dS}{dX}$ 或 $\dfrac{d}{dX}S$. (有限或无穷) 和的导数等于导数的和. 映射 $S\to S'$ 是从 $K[[X]]$ 到其本身的线性映射. 此外, 两形式级数的积的导数由下列公式给出:

$$\frac{d}{dX}(ST)=\frac{dS}{dX}T+S\frac{dT}{dX}. \tag{6.2}$$

实际上, 只需在 S 及 T 为单项式的特殊情形下证明这一公式, 而这是可以立即证明的.

如果 $S(0)\neq 0$, 设 T 是 S 的倒级数 (参看第 5 段). 由公式 (6.2) 得

$$\frac{d}{dX}\left(\frac{1}{S}\right)=-\frac{1}{S^2}\frac{dS}{dX}. \tag{6.3}$$

我们可递推定义形式级数的**逐次导数**. 如果 $S(X)=\Sigma a_nX^n, n$ 阶导数是

$$S^{(n)}(X)=n!a_n+ \text{ 次数 } \geqslant 1 \text{ 的各项}.$$

因此有

$$S^{(n)}(0)=n!a_n, \tag{6.4}$$

这里 $S^{(n)}(0)$ 表示在 $S^{(n)}(X)$ 中, 用级数 0 代换 X 而得的结果.

7. 反级数

由 $I(X)=X$ 所定义的级数 $I(X)$ 对形式级数的复合是**中性元素**:

$$S\circ I=S=I\circ S.$$

命题 7.1 设已给形式级数 S, 要使得存在形式级数 T, 满足

$$T(0)=0,\quad S\circ T=I, \tag{7.1}$$

必须而且只需

$$S(0)=0,\quad S'(0)\neq 0. \tag{7.2}$$

如果是这样, T 是唯一的, 并且我们有 $T\circ S=I$; 换句话说, T 是 S 对复合法则 $\circ$ 的逆.

证明 设 $S(X)=\sum\limits_{n\geqslant 0}a_nX^n$, $T(Y)=\sum\limits_{n\geqslant 1}b_nY^n$. 如果我们有

$$S(T(Y))=Y, \tag{7.3}$$

由两边相应项系数相等即得

$$a_0=0,\quad a_1b_1=1. \tag{7.4}$$

因此条件 (7.2) 是必要的.

假定条件 (7.2) 成立. 令 (7.3) 左边中 Y^n 的系数为 0, 这一系数等于

$$a_1T(Y)+a_2(T(Y))^2+\cdots+a_n(T(Y))^n$$

中 Y^n 的系数, 由此得关系式

$$a_1b_n+P_n(a_2,\cdots,a_n,\ b_1,\cdots,b_{n-1})=0, \tag{7.5}$$

其中 P_n 是已知的整系数 $(\geqslant 0)$ 多项式, 并且对 $a_2,\cdots,a_n$ 是线性的. 既然 $a_1\neq 0$, 由 (7.4) 中第二个关系式可算出 b_1; 其次, 对于 $n\geqslant 2$, 由关系式 (7.5) 对 n 递推可算出 b_n. 这样就证明了形式级数 $T(Y)$ 的存在与唯一性.

上面求得的级数满足 $T(0)=0$, $T'(0)\neq 0$, 因此对 T 应用刚刚对 S 已证明的结果, 可见存在着一个形式级数 S_1, 满足

$$S_1(0)=0,\quad T\circ S_1=I.$$

我们有

$$S_1=I\circ S_1=(S\circ T)\circ S_1=S\circ(T\circ S_1)=S\circ I=S.$$

因此 S_1 就是 S, 并且恰好有 $T\circ S=I$, 证完.

注释 既然 $S(T(Y)) = Y, T(S(X)) = X$, 我们可以说 "形式变换"

$$Y = S(X), \quad X = T(Y)$$

互为反变换; 也可把 T 称为级数 S 的 "反形式级数".

命题 7.1 是一种 "形式隐函数定理".

§2. 收敛幂级数

1. 复数域

以下域 K 是域 $\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$ 二者中之一: $\mathbf{R}$ 表示实数域, $\mathbf{C}$ 表示复数域.

我们记得, 复数 $z = x + iy$ (x 及 y 是实数) 可用 $\mathbf{R}^2$ 平面上坐标为 x 及 y 的点表示. 如果对每个 $z = x + iy$, 取 "共轭" 数 $\bar{z} = x - iy$, 我们就确定了域 $\mathbf{C}$ 的一个自同构 $z \to \bar{z}$; 这是因为有关系式

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}', \quad \overline{zz'} = \bar{z}\overline{z'}.$$

$\bar{z}$ 的共轭复数是 z. 换句话说, 变换 $z \to \bar{z}$ 是**对合的**, 亦即等于其逆变换.

我们确定复数 z 的**范数, 绝对值**, 或**模**如下:

$$|z| = (z\bar{z})^{1/2}.$$

它具有下列性质:

$$|z + z'| \leqslant |z| + |z'|, \quad |zz'| = |z| \cdot |z'|, \quad |1| = 1.$$

范数 $|z|$ 总是 $\geqslant 0$, 并且只有在 $z = 0$ 时为零. 由范数可定义域 $\mathbf{C}$ 中的一个**距离**: 从 z 到 z' 的距离是 $|z - z'|$; 这就是 $\mathbf{R}^2$ 平面上的欧氏距离. 对于这种距离, $\mathbf{C}$ 是**完备**空间, 亦即**柯西判别准则**成立: 要使点列 $z_n (\in \mathbf{C})$ 有极限, 必须而且只需我们有

$$\lim_{\substack{m \to \infty \\ n \to \infty}} |z_m - z_n| = 0.$$

从这一柯西判别准则可推出著名的定理: 如果复数项级数 $\sum\limits_n u_n$ 满足 $\sum\limits_n |u_n| < +\infty$, 那么这级数收敛 (我们说级数绝对收敛). 此外,

$$\left| \sum_n u_n \right| \leqslant \sum_n |u_n|.$$

我们总把 $\mathbf{R}$ 看作 $\mathbf{C}$ 的一个子域, 亦即满足 $\bar{z} = z$ 的 z 所形成的子域. 从 $\mathbf{C}$ 上的范数导出 $\mathbf{R}$ 上的范数, 它就是实数的绝对值. $\mathbf{R}$ 是完备的. 在后面, 域 $\mathbf{C}$ (或 $\mathbf{R}$) 的范数起着主要的作用.

我们把 $z (\in \mathbf{C})$ 的 "实部" 及 "虚系数" 记作

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \quad 及 \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

2. 有关函数项级数收敛概念之回顾

(关于这里讲到的概念, 读者可参考 J. 迪斯米埃的《数学教程 I》, J. Dixmier, Cours de I'A. C. E. S., Topologie, VI 章, §9. 中译本, 丁善瑞译, 北京高等教育出版社, 1988 年)[①]

考虑在集 E 上定义的取实值或复值的函数 (更一般地, 可考虑在一完备赋范向量空间内取值的函数; 参看上引书). 对于每个函数 u, 我们记

$$\|u\| = \sup_{x\in E} |u(x)|,$$

这是一个 $\geqslant 0$ 的数, 有时可为无穷大. 当 $\|u\| < +\infty$ 时, 对于每个数量 λ, 我们显然有

$$\|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\|, \quad \|\lambda u\| = |\lambda| \cdot \|u\|.$$

换句话说, 在满足 $\|u\| < +\infty$ 的函数 u 的向量空间上, $\|u\|$ 是一个范数.

已给函数项 u_n 的级数, 如果范数的级数 $\sum\limits_n \|u_n\|$ 是一正项收敛级数, 亦即如果 $\sum\limits_n \|u_n\| < +\infty$, 那么我们说级数 $\sum\limits_n u_n$ **正规收敛**. 由此可推出: 对于每个 $x \in E$, 级数 $\sum\limits_n |u_n(x)|$收敛, 从而级数 $\sum\limits_n u_n(x)$ 绝对收敛; 不但如此, 如果 $v(x)$ 表示后一级数的和, 我们有

$$\|v\| \leqslant \sum_n \|u_n\|, \quad \lim_{p\to\infty} \|v - \sum_{n=0}^{p} u_n\| = 0.$$

上列第二个关系式表明: 当 p 趋近于无穷大时, 部分和 $\sum\limits_{n=0}^{p} u_n$ 一致收敛 于 v. 这样, 任何正规收敛级数是一致收敛的.

设 A 是 E 的一个子集, 考虑 E 上一般项是 u_n 的级数. 如果函数项

$$u'_n = u_n|A \quad (u_n \text{ 在 } A \text{ 的限制})$$

的级数正规收敛, 那么我们说 $\sum\limits_n u_n$ 对于 $x \in A$ 正规收敛. 这时对每个 $|u_n(x)|$, 可找到常数 $\varepsilon_n \geqslant 0$ 作为它在 A 上的一个上界, 使得级数 $\sum\limits_n \varepsilon_n$ 收敛.

我们记得, (在拓扑空间 E 上) 连续函数的一致收敛序列的极限是连续的. 特别, 连续函数项正规收敛级数的和是连续的. 由此可以推出:

命题 2.1 假定对于每个 n, $\lim\limits_{x\to x_0} u_n(x)$ 存在, 设 a_n 是这一极限的值. 这时如果级数 $\sum\limits_n u_n$ 正规收敛, 那么级数 $\sum\limits_n a_n$ 收敛, 并且我们有

$$\sum_n a_n = \lim_{x\to x_0} \left(\sum_n u_n(x) \right)$$

[①] 也可参考 J. Dieudonné, Foundations of Modern Analysis, Acad. Press, Inc., New York, 1960. 中译本. 现代分析基础, 第一卷, 郭瑞芝等译, 科学出版社,1982 年.— 译注

(交换求和与求极限的次序).

以上所讲的都可推广到多重级数, 还可更一般地推广到函数的可和族 (参考迪斯米埃的上引教程).

3. 幂级数的收敛半径

我们将考虑的所有幂级数的系数都在域 $\mathbf{R}$ 及 $\mathbf{C}$ 二者之一内.

还要指出, 当系数是在更一般的非离散完备赋值域时, 以下所讲的仍然成立, 即对这样的域 K 成立: 它具有从 K 到非负实数集的映射 $x \to |x|$, 满足

$$\begin{cases} |x+y| \leqslant |x|+|y|, \quad |xy| = |x| \cdot |y|, \\ (|x|=0) \Leftrightarrow (x=0), \end{cases}$$

并且存在着一些 $x \neq 0$, 使得 $|x| \neq 1$.

设 $S(X) = \sum\limits_{n \geqslant 0} a_n X^n$ 是一形式级数, 其系数在 $\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$ 内. 我们要用域中一元素 z 来代替字母 X, 这样可得出级数的一 "值" $S(z)$, 这个值是域中的元素; 但进行这种代换必须要求级数收敛. 实际上, 我们限于考虑级数为绝对收敛情形.

准确地说, 引进实变数 $r \geqslant 0$, 并且考虑正 (或零) 项级数

$$\sum_{n \geqslant 0} |a_n| r^n,$$

它称为级数 $S(X)$ 的**连带级数**. 它的和是一确定的数 $\geqslant 0$, 并可能为无穷大. 满足

$$\sum_{n \geqslant 0} |a_n| r^n < +\infty$$

的 $r \geqslant 0$ 的集显然是半直线 $\mathbf{R}^+$ 的一个区间, 并且由于级数在 $r = 0$ 时收敛, 这个区间不是空的. 它在右边是开的或闭的, 它是有限或无限区间, 并且可能化为唯一的点 0. 在所有情形下, 设 ρ 是这区间的上确界: ρ 是一个非负的有限数或无穷大, 并且可能是零. 我们称它为形式幂级数 $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n X^n$ 的**收敛半径**. 满足 $|z| < \rho$ 的数 z 的集称为幂级数的**收敛圆盘**, 它是一个开集; 如果 $\rho = 0$, 它是空集. 当系数的域是复数域 $\mathbf{C}$ 时, 这确实是一个圆盘.

命题 3.1 a) 对于任何 $r < \rho$, 级数 $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$ 对 $|z| \leqslant r$ 正规收敛; 特别, 对满足 $|z| < \rho$ 的每个 z, 级数绝对收敛.

b) 级数 $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$ 对 $|z| > \rho$ 发散 (对 $|z| = \rho$ 不能作结论).

证明 命题 3.1 可由下列引理推出.

阿贝尔引理 设实数 r 及 r_0 满足 $0 < r < r_0$. 如果存在着一个有限数 $M > 0$, 使得对于所有整数 $n \geqslant 0$,

$$|a_n|(r_0)^n \leqslant M,$$

那么级数 $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ 对 $|z|\leqslant r$ 正规收敛.

事实上, 我们有 $|a_n z^n|\leqslant |a_n| r^n \leqslant M(r/r_0)^n$, 并且 $\varepsilon_n = M(r/r_0)^n$ 是一个收敛级数的一般项, 即一个公比为 $r/r_0 < 1$ 的几何级数的一般项.

现在证明命题 3.1 的论断 a). 如果 $r<\rho$, 取 r_0, 使得 $r<r_0<\rho$; 既然级数 $\sum_{n\geqslant 0} |a_n|(r_0)^n$ 收敛, 其一般项以一个确定的数 M 为上界, 于是由阿贝尔引理可推出, $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ 对 $|z|\leqslant r$ 正规收敛. 还只需证明论断 b). 如果 $|z|>\rho$, 那么存在着一些整数 n, 使得 $|a_n z^n|$ 可为任意大; 因为否则由阿贝尔引理, 对于满足 $\rho<r'<|z|$ 的一个 r', 级数 $\sum_{n\geqslant 0} |a_n|(r')^n$ 应当收敛, 这与 ρ 的定义相矛盾.

收敛半径表示式 (阿达马) 现证明公式

$$1/\rho = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}. \tag{3.1}$$

首先我们知道, 实数 $u_n \geqslant 0$ 的序列上极限的定义是

$$\limsup_{n\to\infty} u_n = \lim_{p\to\infty} (\sup_{n\geqslant p} u_n).$$

为了证明 (3.1), 我们应用经典的收敛判别准则: 设有数 $v_n \geqslant 0$ 的序列, 如果 $\lim_{n\to\infty}\sup(v_n)^{1/n} < 1$, 就有 $\sum_n v_n < +\infty$; 并且如果 $\limsup_{n\to\infty}(v_n)^{1/n} > 1$, 就有 $\sum_n v_n = +\infty$ (“柯西法则”, 这一准则可从比较级数 $\sum_n v_n$ 与一几何级数推出). 在这里我们令 $v_n = |a_n| r^n$, 从而

$$\limsup_{n\to\infty}(v_n)^{1/n} = r(\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}),$$

因此级数 $\sum_n |a_n| r^n$ 当 $1/r > \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$ 时收敛, 当 $1/r < \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$ 时发散. 这就证明了 (3.1).

几个例子 1) 级数 $\sum_{n\geqslant 0} n! z^n$ 的收敛半径为零;

2) 级数 $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!} z^n$ 的收敛半径为无穷大;

3) 级数 $\sum_{n\geqslant 0} z^n$, $\sum_{n>0} \frac{1}{n} z^n$ 及 $\sum_{n>0} \frac{1}{n^2} z^n$ 的收敛半径都等于 1. 可以证明, 它们在 $|z|=1$ 上的收敛或发散的性质不同.

4. 收敛幂级数的加法和乘法

命题 4.1 设 $A(X)$ 及 $B(X)$ 是两个形式幂级数, 其收敛半径 $\geqslant \rho$. 设

$$S(X) = A(X) + B(X) \quad 及 \quad P(X) = A(X)\cdot B(X)$$

是它们的和及乘积. 那么

a) 级数 $S(X)$ 及 $P(X)$ 的收敛半径 $\geqslant \rho$;

b) 而且对于 $|z| < \rho$, 我们有

$$S(z) = A(z) + B(z), \quad P(z) = A(z)B(z). \tag{4.1}$$

证明　设

$$A(X) = \sum_{n\geqslant 0} a_n X^n, \quad B(X) = \sum_{n\geqslant 0} b_n X^n,$$
$$S(X) = \sum_{n\geqslant 0} c_n X^n, \quad P(X) = \sum_{n\geqslant 0} d_n X^n.$$

令

$$\gamma_n = |a_n| + |b_n|, \quad \delta_n = \sum_{0\leqslant p\leqslant n} |a_p| \cdot |b_{n-p}|.$$

我们有 $|c_n| \leqslant \gamma_n$, $|d_n| \leqslant \delta_n$. 如果 $r < \rho$, 级数 $\sum\limits_{n\geqslant 0} |a_n| r^n$ 及 $\sum\limits_{n\geqslant 0} |b_n| r^n$ 收敛, 从而

$$\sum_{n\geqslant 0} \gamma_n r^n = \left(\sum_{n\geqslant 0} |a_n| r^n\right) + \left(\sum_{n\geqslant 0} |b_n| r^n\right) < +\infty,$$
$$\sum_{n\geqslant 0} \delta_n r^n = \left(\sum_{p\geqslant 0} |a_p| r^p\right) \cdot \left(\sum_{q\geqslant 0} |b_q| r^q\right) < +\infty.$$

因此级数 $\sum\limits_{n\geqslant 0} |c_n| r^n$ 及 $\sum\limits_{n\geqslant 0} |d_n| r^n$ 收敛. 这样, 任何 $r < \rho$ 至多等于级数 $S(X)$ 及 $P(X)$ 中每一个的收敛半径. 由此可见, 这两收敛半径 $\geqslant \rho$.

还只要证明关系式 (4.1). 其中第一式是明显的, 第二式可由收敛级数的乘法推出; 准确地说, 我们有一经典命题, 现复述如下:

命题 4.2　设 $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ 及 $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ 是两绝对收敛级数. 如果令

$$w_n = \sum_{0\leqslant p\leqslant n} u_p v_{n-p},$$

那么级数 $\sum\limits_{n\geqslant 0} w_n$ 绝对收敛, 并且它的和等于积

$$\left(\sum_{p\geqslant 0} u_p\right) \cdot \left(\sum_{q\geqslant 0} v_q\right).$$

事实上, 令 $\alpha_p = \sum\limits_{n\geqslant p} |u_n|$, $\beta_q = \sum\limits_{n\geqslant q} |v_n|$, 我们有

$$\sum_{n\geqslant 0} |w_n| \leqslant \sum_{p\geqslant 0}\sum_{q\geqslant 0} |u_p| \cdot |v_q| = \alpha_0 \beta_0;$$

而且, 如果 $m \geqslant 2n$,

$$\sum_{k \leqslant m} w_k - \left(\sum_{k \leqslant n} u_k\right) \cdot \left(\sum_{k \leqslant n} v_k\right)$$

的绝对值不超过一些项 $|u_p| \cdot |v_q|$ 的和, 这里整数 p 及 q 中至少有一个 $> n$. 这个和不超过 $\alpha_0\beta_{n+1} + \beta_0\alpha_{n+1}$, 而后者当 n 趋于无穷大时趋近于 0. 因此 $\sum\limits_{k \leqslant m} w_k$ 趋近于无穷和 $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ 及 $\sum\limits_{n \geqslant 0} v_n$ 的乘积.

5. 一个收敛幂级数代入另一收敛幂级数

设已给两形式幂级数 S 及 T, 而且 $T(0) = 0$. 在 §1 第 4 段中, 已经下了形式幂级数 $S \circ T$ 的定义.

命题 5.1 *令 $T(X) = \sum\limits_{n \geqslant 1} b_n X^n$. 如果收敛半径 $\rho(S)$ 及 $\rho(T)$ 都 $\neq 0$, 那么 $U = S \circ T$ 的收敛半径也 $\neq 0$. 准确地说, 存在着 $r > 0$, 使得 $\sum\limits_{n \geqslant 1} |b_n| r^n < \rho(S)$. 如果这样选出 r, U 的收敛半径 $\geqslant r$, 并且对于满足 $|z| \leqslant r$ 的任何 z, 我们有*

$$|T(z)| < \rho(S)$$

及

$$S(T(z)) = U(z). \tag{5.1}$$

证明 令 $S(X) = \sum\limits_{n \geqslant 0} a_n X^n$. 由于 T 的收敛半径 $\neq 0$, 对于充分小的 $r > 0$, $\sum\limits_{n \geqslant 1} |b_n| r^n$ 是有限数. 因此对于充分小的 $r > 0$, $\sum\limits_{n \geqslant 1} |b_n| r^{n-1}$ 是有限数, 从而当 r 趋近于 0 时,

$$\sum_{n \geqslant 1} |b_n| r^n = r \cdot \left(\sum_{n \geqslant 1} |b_n| r^{n-1}\right)$$

趋近于 0. 于是存在着一个 $r > 0$, 使得 $\sum\limits_{n \geqslant 1} |b_n| r^n < \rho(S)$. 那么

$$\sum_{p \geqslant 0} |a_p| \left(\sum_{k \geqslant 1} |b_k| r^k\right)^p$$

是有限数. 既然这是一个级数 $\sum\limits_{n \geqslant 0} \gamma_n r^n$, 并且如果令 $U(X) = \sum\limits_{n \geqslant 0} c_n X^n$, 我们显然有 $|c_n| \leqslant \gamma_n$. 这样, $\sum\limits_{n \geqslant 0} |c_n| r^n$ 是有限数, 而且 U 的收敛半径 $\geqslant r$.

还只需证明关系式 (5.1). 令 $S_n(X) = \sum\limits_{0 \leqslant k \leqslant n} a_k X^k$, 并且设 $S_n \circ T = U_n$. 既然映射 $T \to T(z)$ 是环的一个同态, 并且 S_n 是多项式, 对于 $|z| \leqslant r$, 我们有

$$U_n(z) = S_n(T(z)).$$

因为级数 S 在点 $T(z)$ 收敛, 所以我们有

$$S(T(z)) = \lim_n S_n(T(z)).$$

另一方面, $U - U_n = (S - S_n) \circ T$ 的系数的绝对值小于

$$\sum_{p>n} |a_p| \left(\sum_{k \geqslant 1} |b_k| r^k \right)^p$$

的相应系数. 当 $n \to +\infty$ 时, 上列级数的和趋近于 0. 于是对于 $|z| \leqslant r$, 当 $n \to +\infty$ 时, $U(z) - U_n(z)$ 趋近于零. 因此最后有: 对于 $|z| \leqslant r$,

$$U(z) = \lim_{n\to\infty} U_n(z) = \lim_{n\to\infty} S_n(T(z)) = S(T(z)),$$

这样证明了关系式 (5.1). 证完.

关系式 (5.1) 的解释: 假定像命题 5.1 的叙述中那样选取 r. 用 T 表示对 $|z| \leqslant r$ 确定的函数 $z \to T(z)$, 同样用 $\widetilde{S}$ 及 $\widetilde{U}$ 表示级数 S 及 U 所确定的函数. 关系式 (5.1) 表明, 对于 $|z| \leqslant r$, 复合映射 $\widetilde{S} \circ \widetilde{T}$ 有定义, 并且等于 $\widetilde{U}$. 这样, 从形式级数之间的关系 $U = S \circ T$ 可以推出: 当 S 及 T 的收敛半径 $\neq 0$ 时, 只需限于考虑绝对值充分小的变量 z 之值, 就有关系式 $\widetilde{U} = \widetilde{S} \circ \widetilde{T}$.

6. 收敛幂级数的倒级数

我们知道 (§1, 命题 5.1), 如果 $S(X) = \sum\limits_{n \geqslant 0} a_n X^n$, 其中 $a_0 \neq 0$, 那么存在一个并且唯一一个形式级数 $T(X)$, 使得乘积 $S(X)T(X)$ 等于 1.

命题 6.1 如果 S 的收敛半径 $\neq 0$, 那么满足 $ST = 1$ 的级数 T 的收敛半径也 $\neq 0$.

证明 用适当的常数乘 $S(X)$, 可以化到 $a_0 = 1$ 情形. 然后令 $S(X) = 1 - U(X)$, 其中 $U(0) = 0$. 倒级数 $T(X)$ 可在级数 $1 + \sum\limits_{n \geqslant 1} Y^n$ 中用 $U(X)$ 代换 Y 而得. 既然级数 $1 + \sum\limits_{n \geqslant 1} Y^n$ 的收敛半径等于 1, 从而 $\neq 0$, 于是命题 6.1 可由命题 5.1 推出.

7. 收敛幂级数的求导

命题 7.1 设 $S(X) = \sum\limits_{n \geqslant 0} a_n X^n$ 为一形式幂级数, 并设

$$S'(X) = \sum_{n \geqslant 0} n a_n X^{n-1}$$

为导级数 (参看 §1 第 6 段). 那么级数 S 及 S' 的收敛半径相同. 而且如果这一收敛半径 $\rho \neq 0$, 我们有, 对于 $|z| < \rho$,

$$S'(z) = \lim_h \frac{S(z+h) - S(z)}{h}, \tag{7.1}$$

其中 h 从 $\neq 0$ 的值趋近于 0.

初步评注 如果 $|z| < \rho$, 那么对于绝对值充分小的 h (即对于 $|h| < \rho - |z|$), 我们也有 $|z+h| < \rho$, 因此 $S(z+h)$ 有意义. 另一方面, 在关系式 (7.1) 中, 当系数的域是域 $\mathbf{R}$ 时, 应设 h 从不等于 0 的实数值趋近于 0; 当系数的域是域 $\mathbf{C}$ 时, 应设 h 从不等于 0 的复数值趋近于 0. 在域 $\mathbf{R}$ 情形, 关系式 (7.1) 表明函数 $z \to S(z)$ 有导数 $S'(z)$; 在复数域 $\mathbf{C}$ 情形, 关系式 (7.1) 表明我们也有关于复变数 z 的导数概念. 在所有情形下, 由导函数 $S'(z)$ 存在显然可推出: 函数 $S(z)$ 对于 $|z| < \rho$ 连续, 而且这一点也可直接证明.

命题 7.1 的证明 令 $|a_n| = \alpha_n$, 并把级数 S 及 S' 的收敛半径记作 ρ 及 ρ'. 如果 $r < \rho'$, 级数 $\sum\limits_{n\geqslant 0} n\alpha_n r^{n-1}$ 收敛, 于是

$$\sum_{n\geqslant 1} \alpha_n r^n \leqslant r\left(\sum_{n\geqslant 0} n\alpha_n r^{n-1}\right) < +\infty,$$

从而 $r \leqslant \rho$. 反之, 设 r 是小于 ρ 的一数, 取 r', 使得 $r < r' < \rho$, 我们有

$$n\alpha_n r^{n-1} = \frac{1}{r'}(\alpha_n r'^n) \cdot n\left(\frac{r}{r'}\right)^{n-1}.$$

既然 $r' < \rho$, 存在着一个 (有限) 数 $M > 0$, 使得对于任何 $n, \alpha_n r'^n \leqslant M$, 从而

$$n\alpha_n r^{n-1} \leqslant \frac{M}{r'} n\left(\frac{r}{r'}\right)^{n-1}.$$

并且由于级数 $\sum\limits_{n\geqslant 1} n\left(\frac{r}{r'}\right)^{n-1}$ 收敛, 级数 $\sum\limits_{n\geqslant 1} n\alpha_n r^{n-1}$ 收敛, 因而 $r \leqslant \rho'$. 这样, 任何小于 ρ' 的数 $\leqslant \rho$, 并且任何小于 ρ 的数 $\leqslant \rho'$. 由此推出 $\rho = \rho'$.

还只要证明关系式 (7.1). 固定 z, 使得 $|z| < \rho$; 选取 r, 使得 $|z| < r < \rho$; 并且今后设

$$0 \neq |h| \leqslant r - |z|. \tag{7.2}$$

于是 $S(z+h)$ 有意义, 并且我们有

$$\frac{S(z+h) - S(z)}{h} - S'(z) = \sum_{n\geqslant 1} u_n(z,h), \tag{7.3}$$

其中已令

$$u_n(z,h) = a_n\{(z+h)^{n-1} + z(z+h)^{n-2} + \cdots + z^{n-1} - nz^{n-1}\}.$$

既然 $|z|$ 及 $|z+h|$ 都 $\leqslant r$, 我们有 $|u_n(z,h)| \leqslant 2n\alpha_n r^{n-1}$. 既然 $r < \rho$, 我们有 $\sum\limits_{n\geqslant 1} n\alpha_n r^{n-1} < +\infty$. 因此已给 $\varepsilon > 0$, 存在一整数 n_0, 使得

$$\sum_{n > n_0} 2n\alpha_n r^{n-1} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

这样选取了 n_0 后, 有限和 $\sum\limits_{n\leqslant n_0} u_n(z,h)$ 是一个 h 的多项式, 并在 $h=0$ 时为零, 因此只要 $|h|$ 小于一个适当的数 η, 就有 $\left|\sum\limits_{n\leqslant n_0} u_n(z,h)\right| \leqslant \varepsilon/2$. 最后, 如果 h 满足 (7.2) 以及 $|h|\leqslant\eta$, 从 (7.3) 可推出

$$\left|\frac{S(z+h)-S(z)}{h}-S'(z)\right| \leqslant \left|\sum_{n\leqslant n_0} u_n(z,h)\right| + \sum_{n>n_0} 2n\alpha_n r^{n-1} \leqslant \varepsilon.$$

于是关系式 (7.1) 得证.

评注 可以证明, 对于满足 $|z|\leqslant r$ 的 z (r 是严格小于收敛半径 ρ 的一个确定的数), $\dfrac{S(z+h)-S(z)}{h}$ 一致收敛于 $S'(z)$.

8. 幂级数系数的计算

设 $S(X)$ 为一形式幂级数, 其收敛半径 $\rho\neq 0$. 对于 $|z|<\rho$, 设 $S(z)$ 为级数 $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ 的和. 这是一个有导函数 $S'(z)=\sum\limits_{n\geqslant 0} n a_n z^{n-1}$ 的函数. 对级数 S' 可重新应用命题 7.1, 因此对于 $|z|<\rho$, $S'(z)$ 也有一导函数 $S''(z)$, 它是有同一收敛半径 ρ 的幂级数 $\sum\limits_{n\geqslant 0} n(n-1)a_n z^{n-2}$. 依此类推. 由递推可以看出, 对于 $|z|<\rho$, $S(z)$ 是无限可微函数, 其 n 阶导数是

$$S^{(n)}(z)=n!a_n+T_n(z),$$

其中 T_n 是阶 $\geqslant 1$ 的级数, 换句话说, $T_n(0)=0$. 由此推出

$$a_n=\frac{1}{n!}S^{(n)}(0). \tag{8.1}$$

这个基本公式特别表明: 如果我们知道函数 $S(z)$ 在 0 的邻域 (无论怎样小) 内的值, 幂级数 S 的系数 a_n 就完全确定了. 因此

已给对于充分小的 $|z|$ 有定义的函数 $f(z)$, 那么存在至多一个形式幂级数 $S(X)=\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n X^n$, 其收敛半径 $\neq 0$, 并且对于充分小的 $|z|$, 我们有 $f(z)=\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

9. 收敛幂级数的反级数

请参阅 §1 中命题 7.1.

命题 9.1 设 S 是满足

$$S(0)=0, \quad S'(0)\neq 0$$

的幂级数, 并且设 T 是反级数, 亦即满足

$$T(0)=0, \quad S\circ T=I$$

的级数. 如果 S 的收敛半径 $\neq 0$, 那么 T 的收敛半径也 $\neq 0$.

读者可以不作证明承认这一命题, 因为本书后面 (第四章 §5 命题 6.1) 要作出一个证明 (其原理不是建立在收敛幂级数论上).

可是对于好奇的读者, 在这里有一个建立在幂级数论范围内的直接证明. 它要用到 "控制级数" 的概念 (参看第七章). 再采用 §1 中命题 7.1 的证明中的记号, 并且考虑那一节中关系式 (7.5), 由这些关系式可以算出所求级数 $T(X)$ 的未知系数 b_n. 除级数 $S(X)$ 外, 还考虑一个 "控制" 级数, 即级数

$$\overline{S}(X) = A_1X - \sum_{n\geqslant 2} A_nX^n,$$

其系数 $A_n > 0$, 并且对任何 $n, |a_n| \leqslant A_n$; 还假定 $A_1 = |a_1|$. 相应于级数 $\overline{S}$, 由 §1 中命题 7.1 可以作出一个级数.

$$\overline{T}(Y) = \sum_{n\geqslant 1} B_nY^n,$$

使得 $\overline{S}(\overline{T}(Y)) = Y$. 级数的系数 B_n 由与 §1 中 (7.5) 相类似的下列关系式给出:

$$A_1B_n - P_n(A_2, \cdots, A_n,\ B_1, \cdots, B_{n-1}) = 0. \tag{9.1}$$

按 n 递推可以得出:

$$|b_n| \leqslant B_n. \tag{9.2}$$

由此可见, 级数 T 的收敛半径至少等于级数 $\overline{T}$ 的收敛半径. 我们要证明级数 $\overline{T}$ 的收敛半径 > 0, 这样就证明了命题 9.1.

为此, 选择级数 $\overline{S}$ 如下: 设 $r > 0$ 是严格小于级数 S 的收敛半径的一个数 (由假设, 这一收敛半径 $\neq 0$), 因此级数 $\sum\limits_{n\geqslant 1} |a_n|r^n$ 的一般项不超过一个有限数 $M > 0$, 如果令

$$A_1 = |a_1|, \quad A_n = M/r^n \quad 对于\ n \geqslant 2, \tag{9.3}$$

就得到 S 的一个控制级数的系数. 对于 $|x| \leqslant r$, 其和 $\overline{S}(x)$ 等于

$$\overline{S}(x) = A_1x - M\frac{x^2/r^2}{1 - x/r}.$$

现求一个函数 $\overline{T}(y)$, 它对于充分小的 y 的值确定, 在 $y = 0$ 时为零, 并且 $\overline{S}(\overline{T}(y)) = y$ 恒成立; $\overline{T}(y)$ 必然是下列二次方程的解:

$$(A_1/r + M/r^2)\overline{T}^2 - (A_1 + y/r)\overline{T} + y = 0; \tag{9.4}$$

这一方程有解 (在 $y = 0$ 时为零)

$$\overline{T}(y) = \frac{A_1 + y/r - \sqrt{(A_1)^2 - 2A_1y/r - 4My/r^2 + y^2/r^2}}{2(A_1/r + M/r^2)}.$$

当 $|y|$ 充分小时, 上式中根式的形式是 $A_1\sqrt{1+u}$, 其中 $|u| < 1$, 因此 $\overline{T}(y)$ 有 y 的幂级数展式, 它对于充分小的 $|y|$ 收敛. 于是这级数的收敛半径 $\neq 0$, 这正是我们所要证明的.

§3. 指数函数及对数函数

1. 指数函数

我们已经讲过 (§2 第 3 段), 形式级数 $\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n!}X^n$ 的收敛半径为无穷大. 对于复值 z, 定义 e^z 为一个绝对收敛级数的和:

$$e^z=\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n!}z^n.$$

由 §2 中命题 7.1, 这函数有导数

$$\frac{d}{dz}(e^z)=e^z. \tag{1.1}$$

另一方面, 对一般项为

$$u_n=\frac{1}{n!}z^n,\quad v_n=\frac{1}{n!}z'^n$$

的两级数应用 §2 中命题 4.2, 我们得到

$$w_n=\sum_{0\leqslant p\leqslant n}\frac{1}{p!(n-p)!}z^p z'^{n-p}=\frac{1}{n!}(z+z')^n.$$

因此

$$e^{z+z'}=e^z\cdot e^{z'}\qquad(\text{指数函数的基本函数性质}). \tag{1.2}$$

特别,

$$e^z e^{-z}=1;\quad \text{因此对任何 } z,\ e^z\neq 0. \tag{1.3}$$

令 $z=x+iy$ (x 及 y 是实数), 我们有

$$e^{x+iy}=e^x\cdot e^{iy},$$

因此问题归结为研究两函数 e^x 及 e^{iy}, 其中 x 及 y 是实变数. 我们有

$$\frac{d}{dx}(e^x)=e^x,\quad \frac{d}{dy}(e^{iy})=ie^{iy}. \tag{1.4}$$

2. 实指数函数 e^x

我们已经看到 $e^x\neq 0$, 进一步还有 $e^x=(e^{x/2})^2>0$.

又由展开式 $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots$ 可得: 对于 $x>0$, $e^x>1+x$. 因此

$$\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty;$$

将 x 换成 $-x$, 就得到

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$

这样, e^x 是实变数 x 的函数, 它从 0 严格递增到 $+\infty$. 因此变换 $t = e^x$ 具有对 $t > 0$ 有定义的逆变换, 把它记作

$$x = \log t.$$

这是从 $-\infty$ 严格单调递增到 $+\infty$ 的一个函数. 从 e^x 的函数关系式可得

$$\log(tt') = \log t + \log t', \tag{2.1}$$

特别, $\log 1 = 0$.

另一方面, 由关于反函数的导数的定理可得

$$\frac{d}{dt}(\log t) = 1/t. \tag{2.2}$$

用 $1 + u(u > -1)$ 代替 t, $\log(1+u)$ 是 $\dfrac{1}{1+u}$ 的原函数, 它在 $u = 0$ 时为零. 然而我们有幂级数展式

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + \cdots + (-1)^{n-1}u^{n-1} + \cdots,$$

其收敛半径等于 1. 由 §2 中命题 7.1, 原函数的级数有相同的收敛半径, 其和有导数 $\dfrac{1}{1+u}$, 因此对于 $|u| < 1$,

$$\log(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{u^n}{n} + \cdots \tag{2.3}$$

(实际上, 这一展开式对于 $u = 1$ 也成立).

现在令

$$S(X) = \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n!}X^n, \quad T(Y) = \sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n-1}\frac{Y^n}{n}, \tag{2.4}$$

并求复合级数 $U = S \circ T$. 由 §2 中命题 5.1, 我们有: 对于 $-1 < u < +1$,

$$U(u) = S(T(u)),$$

然而 $T(u) = \log(1+u)$, $S(x) = e^x - 1$, 因此

$$U(u) = e^{\log(1+u)} - 1 = (1+u) - 1 = u.$$

根据函数的幂级数展开式的唯一性 (参看 §2 第 8 段), 上式证明了形式级数 U 就是 I. 这样, 级数 S 及 T 互为反级数.

3. 虚指数函数 e^{iy} (y 为实数)

e^{iy} 的级数展开式表明 e^{-iy} 是 e^{iy} 的共轭虚数, 因此 $e^{iy}\cdot e^{-iy}$ 是 e^{iy} 的模的平方. 但由关系式 (1.3), 这一乘积等于 1. 于是

$$|e^{iy}|=1.$$

我们看出, 在表示域 $\mathbf{C}$ 的平面上, 点 e^{iy} 在单位圆上, 即在与原点 O 距离为 1 的点的轨迹上. 满足 $|u|=1$ 的复数 u 关于乘法构成一个群 $\mathbf{U}$. 函数关系式

$$e^{i(y+y')}=e^{iy}\cdot e^{iy'}$$

表明: 映射 $y\to e^{iy}$ 是加法群 $\mathbf{R}$ 到乘法群 $\mathbf{U}$ 的一个同态. 现进一步研究这种映射.

定理 同态 $y\to e^{iy}$ 把 $\mathbf{R}$ 映射到 $\mathbf{U}$ 上, 并且它的 "核" (这是满足 $e^{iy}=1$ 的 y 的子群, 其中 1 为 $\mathbf{U}$ 的中性元素) 由一正实数的所有整数倍组成. 作为定义, 这一实数记作 2π.

证明 引进 e^{iy} 的实部与虚部, 作为定义, 令

$$e^{iy}=\cos y+i\sin y,$$

这样定义了满足

$$\cos^2 y+\sin^2 y=1$$

的两个实函数 $\cos y$ 及 $\sin y$. 这两个函数可展成幂级数, 其收敛半径为无穷大:

$$\begin{cases}\cos y=1-\dfrac{1}{2!}y^2+\cdots+\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}y^{2n}+\cdots,\\ \sin y=y-\dfrac{1}{3!}y^3+\cdots+\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}y^{2n+1}+\cdots.\end{cases}\tag{3.1}$$

现研究这两个函数变化的方式. 我们注意, 分别取 (1.4) 中第二个关系式的实部及虚部, 就得到

$$\frac{d}{dy}(\cos y)=-\sin y,\quad \frac{d}{dy}(\sin y)=\cos y.$$

在 $y=0$ 时, $\cos y$ 等于 1. 既然 $\cos y$ 是连续函数, 那么存在一个数 $y_0>0$, 使得对于 $0\leqslant y\leqslant y_0$, $\cos y>0$. 因此以 $\cos y$ 为导数的 $\sin y$ 在区间 $[0,y_0]$ 内严格递增. 令 $\sin y_0=a>0$. 现证明 $\cos y$ 对于 y 的某一正值为零. 实际上, 假定对于 $y_0\leqslant y\leqslant y_1$, $\cos y>0$. 我们有

$$\cos y_1-\cos y_0=-\int_{y_0}^{y_1}\sin y\,dy.\tag{3.2}$$

既然在区间 $[y_0, y_1]$ 内, $\sin y$ 的导数 >0, 从而 $\sin y$ 递增, 我们有 $\sin y \geqslant a$, 因而

$$\int_{y_0}^{y_1} \sin y\,dy \geqslant a(y_1 - y_0).$$

代入 (3.2), 并且注意到 $\cos y_1 > 0$, 于是求得

$$y_1 - y_0 < \frac{1}{a}\cos y_0.$$

这证明了 $\cos y$ 在区间 $\left[y_0, y_0 + \frac{1}{a}\cos y_0\right]$ 内取值零. 把满足 $\cos y = 0$ 的 y 的最小正值称为 $\frac{\pi}{2}$ (这是数 π 的一个定义). 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 内, $\cos y$ 从 1 严格递减到 0, $\sin y$ 从 0 严格递增到 1, 因此映射 $y \to e^{iy}$ 把紧区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 双方单值映射到单位圆上点 (u, v) 的集, 其中横坐标 u 及纵坐标 v 都 $\geqslant 0$. 根据关于紧空间的连续双方单值映射的一个拓扑定理, 我们得到:

引理 映射 $y \to e^{iy}$ 是从 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 到单位圆 $u^2 + v^2 = 1$ 在第一象限 $u \geqslant 0, v \geqslant 0$ 中那一部分上的一个同胚.

对于 $\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant x$, 我们有 $e^{iy} = ie^{i\left(y-\frac{\pi}{2}\right)}$. 由此容易推出: e^{iy} 取模为 1, 横坐标 $\leqslant 0$, 纵坐标 $\geqslant 0$ 的任何复数值一次, 并且只取一次.

对于区间 $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ 及 $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, 有类似的结论. 因此, 对于 $0 \leqslant y < 2\pi$, e^{iy} 取模为 1 的任何复数值一次, 并且只取一次, 而 $e^{2i\pi} = 1$. 这样, 函数 e^{iy} 有周期 2π, 并且映射 $y \to e^{iy}$ 把 $\mathbf{R}$ 映射到 $\mathbf{U}$ 上. 定理得证.

4. 角的度量. 复数的辐角

用 $2\pi\mathbf{Z}$ 表示加法群 $\mathbf{R}$ 中由数 2π 的整数倍所形成的子群. 映射 $y \to e^{iy}$ 导出从商群 $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ 到群 $\mathbf{U}$ 上的一个同构 φ. 从 $\mathbf{U}$ 到 $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ 上的逆同构 φ^{-1} 使得满足 $|u| = 1$ 的每个复数 u 与一实数相对应, 但后者可能相差 2π 的整数倍; 我们把这类实数称为 u 的**辐角**, 记作 $\arg u$. 为了简单起见, 也用 $\arg u$ 表示模为 2π 的同余类, 即 u 的辐角中任一实数. 函数 $\arg u$ 是 "多值函数" 的一例, 亦即对于变数 u 的已给数值有许多不同的对应值. 这函数解决了 "角的度量" 问题 (定出与 $\mathbf{U}$ 中每一点相对应的角): "角的度量" 是一实数, 但它只是对模 2π 为确定的.

在商群 $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ 上, 赋以数轴 $\mathbf{R}$ 上通常拓扑的**商拓扑**: 设 p 是从 $\mathbf{R}$ 到它的商群 $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ 上的标准映射; 设 A 是 $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ 的一个子集; 如果它的逆像 $p^{-1}(A)$, 即 $\mathbf{R}$ 上关于平移 2π 不变的一个点集是 $\mathbf{R}$ 中的一个开集, 那么集 A 称为**开集**. 显然, 拓扑空间 $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ 是分离的 (换句话说, 其中任意两个不同的点具有两个不相交的开邻域). 而且它是紧的. 事实上, 设 I 是闭区间 $[0, 2\pi]$, 自然的映射 $I \to \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ 把紧空间 I 映射到分离空间 $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ 上, 由一个经典的拓扑定理, 后者也是紧的. 同态

$\varphi: \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} \to \mathbf{U}$ 是连续的. 这是一个从紧空间 $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ 到分离空间 $\mathbf{U}$ 上的一个双方单值映射, 因此 φ 是从 $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ 到 $\mathbf{U}$ 上的同胚.

辐角的一般定义: 对于任何复数 $t \neq 0$, 用下列公式定义 t 的**辐角**:

$$\arg t = \arg (t/|t|).$$

由于 $t/|t| \in \mathbf{U}$, 上式右边已有定义. (注意 0 的辐角没有定义.) 与上面一样, $\arg t$ 的各值相差 2π 的整数倍. 于是我们有

$$t = |t|e^{i \arg t}. \tag{4.1}$$

应用　求解方程 $t^n = a$ (其中已给 $a \neq 0$). 这方程等价于

$$|t| = |a|^{1/n}, \quad \arg t = \frac{1}{n}\arg a.$$

它有 n 个复解, 因为求得 $\arg t$ 是实数, 其相差为 $\dfrac{2\pi}{n}$ 的整数倍.

5. 复对数

已给复数 t, 求满足 $e^z = t$ 的所有复数 z. 这种复数 z 只有在 $t \neq 0$ 时才存在. 在 $t \neq 0$ 时, (4.1) 式说明, 所求的 z 是下列形状的复数:

$$\log |t| + i \arg t. \tag{5.1}$$

作为定义, 令

$$\log t = \log |t| + i \arg t. \tag{5.2}$$

这是相差为 $2\pi i$ 的整数倍的复数. 根据这一定义, 我们有 $e^{\log t} = t$. 当 t 是实数并且 > 0 时, 如果限于取 $\arg t$ 的值为 0, 我们就得到了经典的函数 $\log t$.

无论不等于零的复数 t 及 t' 是什么, 并且无论 $\log t$, $\log t'$ 及 $\log (tt')$ 被选取的值是什么, 我们有

$$\log (tt') = \log t + \log t' \pmod{2\pi i}. \tag{5.3}$$

对数的分支　直到现在为止, 还没有定义 $\log t$ 作为一个真正的函数.

定义　设 D 是平面 $\mathbf{C}$ 上不含点 $t = 0$ 的一个连通开集, 设 $f(t)$ 是在 D 内定义的复变数 t 的连续函数. 如果对于任何 $t \in D$, 我们有 $e^{f(t)} = t$ (换句话说, 如果 $f(t)$ 是 $\log t$ 的一值), 那么我们说 $f(t)$ 是 $\log t$ 的**一个分支**.

我们将要看到 (第二章 §1 第 7 段), 开集 D 应满足怎样的条件, 在 D 内才存在着 $\log t$ 的一个分支. 从现在起, 我们就要看: 如果存在着 $\log t$ 的一个分支, 怎样求得所有分支.

命题 5.1 如果在连通开集 D 内存在着 $\log t$ 的一个分支 $f(t)$, 那么任何其他分支有这样的形状: $f(t)+2k\pi i$ (k 为整数); 反之, 对任何整数 k, $f(t)+2k\pi i$ 是 $\log t$ 的一个分支.

实际上, 假定 $f(t)$ 及 $g(t)$ 是 $\log t$ 的两个分支. 差式

$$h(t)=\frac{f(t)-g(t)}{2\pi i}$$

是 D 内的连续函数, 并且只取整数值. 既然已设 D 是连通的, $h(t)$ 必然是常数. 实际上, 使得 $h(t)$ 等于一已给整数 n 的所有点 $t\in D$ 之集, 既是一开集又是一闭集. 因此这集是空集或等于 D. 上述常数必然是整数. 显然, 对于任何整数 k, $f(t)+2k\pi i$ 是 $\log t$ 的一个分支.

$\arg t$ 在不含原点的连通开集 D 内分支的定义, 也可同样确定. 而且 $\arg t$ 的任何分支确定 $\log t$ 的一个分支, 反过来也是一样.

例 取开半平面 $\mathrm{Re}(t)>0$ 作为 D (我们记得用 $\mathrm{Re}(t)$ 表示 t 的实部). 对于这半平面中的任何 t, $\arg t$ 有一值并且只有一值 $>-\dfrac{\pi}{2}$ 且 $<\dfrac{\pi}{2}$, 把它记作 $\mathrm{Arg}\, t$. 现证明 $\mathrm{Arg}\, t$ 是一连续函数, 从而

$$\log|t|+i\,\mathrm{Arg}\,t$$

是 $\log t$ 在半平面 $\mathrm{Re}(t)>0$ 内的一个分支. 把它称为 $\log t$ 的**主支**.

既然 $\mathrm{Arg}\,t=\mathrm{Arg}\,(t/|t|)$, 而且 $t\to t/|t|$ 是从半平面 $\mathrm{Re}(t)>0$ 到满足 $|u|=1$ 及 $\mathrm{Re}\,(u)>0$ 的 u 的集上的连续映射, 只需证明映射 $y=\mathrm{Arg}\,u$ 为连续的. 然而这是 $u=e^{iy}$ 的逆映射, 其中 y 在开区间 $\left(-\dfrac{\pi}{2},+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内取值; 函数 $u=e^{iy}$ 是从紧区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2},+\dfrac{\pi}{2}\right]$ 到满足 $|u|=1$ 及 $\mathrm{Re}\,(u)\geqslant 0$ 的 u 的集上的双方单值连续映射; 它是一个同胚, 其逆映射当然是连续的.

6. 复对数的级数展开式

命题 6.1 幂级数

$$T(u)=\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n-1}\frac{u^n}{n}$$

在 $|u|<1$ 时收敛, 它的和等于 $\log\,(1+u)$ 的主支.

首先注意, 如果 $|u|<1$, $t=1+u$ 在半平面 $\mathrm{Re}(t)>0$ 中的一个开圆盘内. 再采用关系式 (2.4) 中的记号, 并注意 S 及 T 互为反级数; §2 中的命题 5.1 表明: 对于满足 $|u|<1$ 的任何复数 u, 我们有 $S(T(u))=u$. 换句话说, $e^{T(u)}=1+u$; 因此 $T(u)$ 是 $\log\,(1+u)$ 的一个分支. 为了证明这是主支, 只需证明: 对于 u 的一个特殊值, 它取与主支相同的值, 例如它在 $u=0$ 时为零. 而从 $T(u)$ 的级数展开式, 这是显然的.

命题 6.2 如果 $f(t)$ 是 $\log t$ 在连通开集 D 内的一个分支, 那么函数 $f(t)$ 有关于复变量 t 的导数 $f'(t)$, 并且我们有

$$f'(t) = \frac{1}{t}.$$

事实上, 对于充分小的复数 $h \neq 0$, 我们有

$$\frac{f(t+h)-f(t)}{h} = \frac{f(t+h)-f(t)}{e^{f(t+h)}-e^{f(t)}}.$$

当 z' 趋近于 $z=f(t)$ 时, $\dfrac{e^{z'}-e^{z}}{z'-z}$ 有极限. 因此当 h 趋近于 0 时, $\dfrac{f(t+h)-f(t)}{h}$ 趋近于上列极限的倒数, 即 e^z 在 $z=f(t)$ 时的导数之值的倒数, 从而它等于 $e^{-f(t)}=\dfrac{1}{t}$.

注意 可以验证, 幂级数 $T(u)$ 的导数恰好等于 $\dfrac{1}{1+u}$.

定义 对于任一对复数 $t \neq 0$ 及 α, 令

$$t^{\alpha} = e^{\alpha \log t}.$$

对于固定的 α, 这是 t 的一个多值函数. 与上面一样, 我们定义什么是 t^{α} 在连通开集 D 内的一个分支. $\log t$ 在 D 内的任何分支确定 t^{α} 在 D 内的一个分支.

练习 请读者在必要时再看一下常用函数 $\operatorname{arc\,tg} x$, $\arcsin x$ 等等的幂级数展开式. 另一方面, 对于任何复指数 α 及满足 $|x|<1$ 的任何复数 x, 令

$$(1+x)^{\alpha} = e^{\alpha \log(1+x)},$$

其中 $\log(1+x)$ 表示主支 (函数 $(1+x)^{\alpha}$ 在 $x=0$ 时取值 1); 研究这函数的幂级数展开式.

§4. 单实变或单复变解析函数

1. 定义

定义 1.1 已给在 x_0 的邻域内确定的函数 $f(x)$. 如果存在着一个形式幂级数 $S(X)=\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n X^n$, 其收敛半径 $\neq 0$, 并且对于充分小的 $|x-x_0|$, 满足

$$f(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n (x-x_0)^n,$$

那么我们说 $f(x)$ 在点 x_0 **可以展开为幂级数**.

这一定义适用于 x 是单实变量以及单复变量情形. 由 §2 中第 8 段, 如果级数 $S(X)$ 存在, 它就是唯一的.

如果 $f(x)$ 在点 x_0 可展开成幂级数, 那么函数 f 在 x_0 的一个邻域内无穷可导, 因为幂级数的和无限可导. 设两函数 f 及 g 在点 x_0 可展开成幂级数, 如果它们的乘积 fg 在 x_0 的一个邻域内恒等于零, 那么函数 f 及 g 中至少有一个在 x_0 的邻域内恒等于零. 事实上, 这是由于形式级数环是一整环 (§1 命题 3.1). 如果 f 在点 x_0 可展开成幂级数, 那么存在着一个函数 g, 它在点 x_0 也可展开成幂级数, 并且在 x_0 的一个邻域内, $g' = f$. 除了可能相差一个常数外, 这种函数 g 是唯一的. 为了证明这一点, 只需考虑函数 f 的幂级数展开式中各项之原函数的级数.

以下我们考虑实直线 $\mathbf{R}$ 或复平面 $\mathbf{C}$ 上的开集 D. 如果 D 是 $\mathbf{R}$ 上的开集, D 是开区间的并集; 如果 D 还是连通的, 它就是一个开区间. 用 x 表示在开集 D 内变化的实或复变量.

定义 1.2 设函数 $f(x)$ 在开集 D 内有定义, 并取实数或复数值. 如果对于任何点 $x_0 \in D$, 函数 $f(x)$ 在点 x_0 可展开成幂级数, 那么这函数称为在 D 内**解析**. 换句话说, 这时对于任何点 $x_0 \in D$, 存在着一数 $\rho(x_0) > 0$ 及形式幂级数 $S(X) = \sum\limits_{n \geqslant 0} a_n X^n$, 其收敛半径 $\geqslant \rho(x_0)$, 使得对于 $|x - x_0| < \rho(x_0)$,

$$f(x) = \sum_{n \geqslant 0} a_n (x - x_0)^n.$$

下列各性质是明显的: 在 D 内的任何解析函数在 D 内无限可微, 且其各阶导数在 D 内解析. D 内两解析函数的和及乘积都在 D 内解析; 换句话说, D 内的解析函数形成一环, 并且甚至成一代数. 由 §2 中命题 6.1 可得: 如果 $f(x)$ 在 D 内解析, 那么在开集 D 除去满足 $f(x_0) = 0$ 的点 x_0 而得的集内, $\dfrac{1}{f(x)}$ 解析.

最后, 由 §2 的命题 5.1 可得: 如果 f 在 D 内解析, 在 D' 内取值, 并且如果 g 在 D' 内解析, 那么复合函数 $g \circ f$ 在 D 内解析.

设 f 是 D 内的解析函数 (设 D 为连通的). 如果 f 有原函数 g, 这就是说, 如果在 D 内有一函数 g, 其导数 g' 等于 f, 那么这原函数除了相差一常数外, 是唯一的, 它是一个解析函数.

解析函数的例 x 的多项式是整个实数轴上 (或复平面上) 的解析函数; 有理函数 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 在满足 $Q(x_0) = 0$ 的点 x_0 之集的余集内解析. 由命题 2.1 可得: 函数 e^x 是解析的. 函数 $\operatorname{arc\,tg} x$ 对任何实数 x 是解析的, 这是因为它的导数 $\dfrac{1}{1+x^2}$ 是解析的.

2. 解析判别准则

命题 2.1 设 $S(X)=\sum\limits_{n\geqslant 0}a_nX^n$ 是幂级数, 其收敛半径 $\rho\neq 0$. 设

$$S(x)=\sum_{n\geqslant 0}a_nx^n$$

是级数在 $|x|<\rho$ 时的和. 那么 $S(x)$ 是在圆盘 $|x|<\rho$ 内解析的函数.

这结果完全不是明显的. 它是下列更准确的命题的一个推论:

命题 2.2 在命题 2.1 的假设下, 设 x_0 满足 $|x_0|<\rho$. 那么幂级数

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n!}S^{(n)}(x_0)X^n \tag{2.1}$$

的收敛半径 $\geqslant \rho-|x_0|$, 并且对于 $|x-x_0|<\rho-|x_0|$, 我们有

$$S(x)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n!}S^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n. \tag{2.2}$$

证明 令 $r_0=|x_0|$, $\alpha_n=|a_n|$. 我们有

$$S^{(p)}(x_0)=\sum_{q\geqslant 0}\frac{(p+q)!}{q!}a_{p+q}(x_0)^q,$$

$$|S^{(p)}(x_0)|\leqslant\sum_{q\geqslant 0}\frac{(p+q)!}{q!}\alpha_{p+q}(r_0)^q.$$

对于 $r_0\leqslant r<\rho$, 我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{p\geqslant 0}\frac{1}{p!}|S^{(p)}(x_0)|(r-r_0)^p\\ \leqslant&\sum_{p,q}\frac{(p+q)!}{p!q!}\alpha_{p+q}(r_0)^q(r-r_0)^p\\ \leqslant&\sum_{n\geqslant 0}\alpha_n\left(\sum_{0\leqslant p\leqslant n}\frac{n!}{p!(n-p)!}(r-r_0)^p(r_0)^{n-p}\right)\\ \leqslant&\sum_{n\geqslant 0}\alpha_nr^n<+\infty.\end{aligned} \tag{2.3}$$

因此级数 (2.1) 的收敛半径 $\geqslant r-r_0$. 由于可选取 r 与 ρ 任意接近, 这一收敛半径 $\geqslant\rho-r_0$.

现设 x 满足 $|x-x_0|<\rho-r_0$. 由 (2.3), 二重级数

$$\sum_{p,q}\frac{(p+q)!}{p!q!}a_{p+q}(x_0)^q(x-x_0)^p$$

绝对收敛. 因此, 为了计算它的和, 可以任意方式合并各项. 我们用两种不同的方式计算这个和, 首先合并各项如下:

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n \left(\sum_{0\leqslant p\leqslant n} \frac{n!}{p!(n-p)!}(x-x_0)^p (x_0)^{n-p} \right) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n = S(x);$$

其次, 合并各项如下:

$$\sum_{p\geqslant 0} \frac{(x-x_0)^p}{p!} \left(\sum_{q\geqslant 0} \frac{(p+q)!}{q!} a_{p+q}(x_0)^q \right) = \sum_{p\geqslant 0} \frac{(x-x_0)^p}{p!} S^{(p)}(x_0).$$

比较以上两式, 就得到 (2.2), 证完.

注意 1 级数 (2.1) 的收敛半径可能严格大于 $\rho - |x_0|$. 例如取级数

$$S(X) = \sum_{n\geqslant 0} (iX)^n.$$

对于 $|x| < 1$, 我们有 $S(x) = \dfrac{1}{1-ix}$. 取 x_0 为一实数. 于是有

$$\frac{1}{1-ix} = \frac{1}{1-ix_0} \left(1 - i\frac{x-x_0}{1-ix_0} \right)^{-1} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{i^n}{(1-ix_0)^{n+1}} (x-x_0)^n.$$

这级数在 $|x-x_0| < \sqrt{1+(x_0)^2}$ 时收敛, 而 $\sqrt{1+(x_0)^2}$ 严格大于 $1-|x_0|$.

注意 2 对于 $r < \rho$, 令

$$M(r) = \sum_{n\geqslant 0} |a_n| r^n.$$

由不等式 (2.3), 我们有: 对于 $|x| \leqslant r_0 < r < \rho$,

$$\left| \frac{1}{p!} S^{(p)}(x) \right| \leqslant \frac{M(r)}{(r-r_0)^p}. \tag{2.4}$$

注意 3 如果 x 是一复变量, 在第二章中我们将要看到, 任何有导数的函数是解析的, 因而是无限可导的. 在单实变量情形下, 情况完全不同: 存在着有一阶导数, 但无二阶导数的函数 (只需取无导数的连续函数之原函数为例). 而且还存在着无限可导、但不解析的函数, 这里有一个简单的例子: 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 时为零, 而在 $x \neq 0$ 时为 e^{-1/x^2}. 这函数对任何 x 无限可导, 而且它连同它的所有导数在 $x=0$ 时为零; 假定它是解析的, 它在 $x=0$ 的邻域内应恒等于零, 然而情况却不是这样.

定理 *为了使得在开区间 D 内无限可导的单实变量 x 的函数 $f(x)$ 在 D 内解析, 必须而且只需对任何点 $x_0 \in D$ 有一邻域 V 具有下列性质: 存在着两个有限正数 M 及 t, 使得对于任何 $x \in V$ 及任何整数 $p \geqslant 0$,*

$$\left| \frac{1}{p!} f^{(p)}(x) \right| \leqslant M \cdot t^p. \tag{2.5}$$

证明提要 证明条件的必要性时要应用不等式 (2.4). 证明条件的充分性时要写出函数 $f(x)$ 的有限项泰勒展开式, 然后应用 (2.5) 估计拉格朗日余项.

3. 解析开拓原理

定理 *设 f 是连通开集 D 内的解析函数. 设 $x_0 \in D$. 下列各条件等价:*
a) 对于任何整数 $n \geqslant 0$, $f^{(n)}(x_0) = 0$;
b) f 在 x_0 的一个邻域内恒等于零;
c) f 在 D 内恒等于零.

证明 显然, 由 c) 可推出 a). 现证明由 a) 可推出 b), 由 b) 可推出 c). 假定条件 a) 成立. 于是对于任何 $n \geqslant 0$, 我们有 $f^{(n)}(x_0) = 0$; 这里约定 $f^{(0)} = f$. 在 x_0 的邻域内, $f(x)$ 可按 $x - x_0$ 的乘幂展开成幂级数, 其系数 $\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)$ 为零. 因此 $f(x)$ 在 x_0 的一个邻域内恒等于零. b) 得证.

假定条件 b) 成立. 有某些点 $x \in D$, 在其邻域内, f 恒等于零. 设这些点所成的集为 D'. 要证明 f 在 D 内所有点为零, 只需证明集 D' 既是开集, 又是闭集 (由 b), D' 不是空集, 于是由于 D 是连通集, D' 等于 D). 由 D' 的定义可推出它是开集. 还只需证明: 如果 $x_0 \in D$ 是 D' 的聚点, 那么 $x_0 \in D'$. 可是对于每个 $n \geqslant 0$, 在任意接近 x_0 的点 (即 D' 的点), $f^{(n)}(x) = 0$. 于是由 $f^{(n)}$ 的连续性, 我们有 $f^{(n)}(x_0) = 0$, 这对任何 $n \geqslant 0$ 成立. 于是可看出 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内恒等于零. 因此 $x_0 \in D'$, 证完.

系 1 *在连通开集 D 内解析函数的环是整环.*

事实上, 如果两个在 D 内的解析函数的乘积 fg 恒等于零, 并且如果 $x_0 \in D$, 那么因为形式幂级数环是整环, 函数 f 及 g 中的一个在 x_0 的邻域内恒等于零. 但是如果 f 在 x_0 的邻域内恒等于零, 由上定理, f 在整个 D 内为零.

系 2 (解析开拓原理) *如果在连通开集 D 内解析的两函数 f 及 g 在 D 内一点的邻域中相等, 那么这两函数在 D 内恒等.*

解析开拓问题是这样的: 已给连通开集 D' 内一个解析函数 h, 以及包含 D' 的一个连通开集 D, 试问是否存在着一个在 D 内解析, 在 D' 内与 h 恒等的函数 f? 由系 2, 如果这样的函数 f 存在, 它是唯一的.

4. 解析函数的零点

设 $f(x)$ 是在 x_0 的邻域内解析的函数, 设

$$f(x) = \sum_{n \geqslant 0} a_n (x - x_0)^n$$

是它对于充分小的 $|x - x_0|$ 的幂级数展开式. 设 $f(x_0) = 0$, 还设 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内不恒等于零.

设 k 是使 $a_k \neq 0$ 的最小整数. 级数

$$\sum_{n \geqslant k} a_n (x - x_0)^{n-k}$$

在 $|x - x_0|$ 充分小时收敛. 其和 $g(x)$ 是在 x_0 的邻域内的解析函数, 并且 $g(x_0) \neq 0$. 于是对于与 x_0 邻近的 x, 我们有

$$f(x) = (x - x_0)^k g(x), \quad g(x_0) \neq 0. \tag{4.1}$$

这样确定的整数 $k > 0$ 称为函数 f 的零点 x_0 的**阶**. 它的特性是由关系式 (4.1) 说明的, 其中 $g(x)$ 在 x_0 的邻域内解析. 阶 k 的特性也可由下列条件说明:

$$f^{(n)}(x_0) = 0, \quad \text{对于 } 0 \leqslant n < k; \qquad f^{(k)}(x_0) \neq 0.$$

如果 $k = 1$, x_0 称为**单零点**. 如果 $k \geqslant 2$, x_0 称为**多重零点**.

从关系式 (4.1) 及 $g(x)$ 的连续性可推出:

$$f(x) \neq 0, \quad \text{对于 } 0 < |x - x_0| < \varepsilon \ (\varepsilon > 0 \text{ 充分小}).$$

换句话说, 点 x_0 有一邻域, 在其中它是函数 $f(x)$ 的唯一零点.

命题 4.1 如果 f 是在连通开集 D 内的解析函数, 并且如果 f 不恒等于零, 那么 f 的零点的集是一离散集 (换句话说, 这集中的所有点是孤立的).

事实上, 由第 3 段中系 2, 在 D 内任何点的邻域内, f 不恒等于零. 于是可对 f 的每个零点应用上面讲到的结果.

特别, D 的任何紧子集只含函数 f 的有限个零点.

5. 亚纯函数

设 f 及 g 是连通开集 D 上的解析函数, 并设 g 不恒等于零. 在 D 内任何点 x_0, 只要 $g(x_0) \neq 0$, 那么在 x_0 的一个邻域内, 函数 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 有定义并且解析. 这就是说, 可能除去若干孤立点外, 这函数在 D 内其它任何点有定义并且解析.

现考察 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 在 $g(x)$ 的一个零点 x_0 的邻域内之性质. 如果 $f(x)$ 不恒等于零, 我们有

$$f(x) = (x - x_0)^k f_1(x), \ g(x) = (x - x_0)^{k'} g_1(x),$$

其中 k 及 k' 是整数, $k \geqslant 0$, $k' > 0$, f_1 及 g_1 是在 x_0 的邻域内的解析函数, $f_1(x_0) \neq 0$, $g_1(x_0) \neq 0$, 因此对于邻近 x_0 的 $x \neq x_0$,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = (x - x_0)^{k-k'} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}.$$

函数 $h_1(x)=\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$ 在 x_0 的邻域内解析, 并且 $h_1(x_0)\neq 0$. 这时有两种可能情况:

1° 我们有 $k\geqslant k'$, 于是函数

$$(x-x_0)^{k-k'}h_1(x)$$

在 x_0 的邻域内解析, 并且在 $x\neq x_0$ 时与 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 相等. 这样开拓到点 x_0 的函数 $\dfrac{f}{g}$ 在 x_0 的邻域内解析. 如果 $k>k'$, 它以 x_0 为零点.

2° 我们有 $k<k'$. 于是

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1}{(x-x_0)^{k'-k}}h_1(x),\quad h_1(x_0)\neq 0$$

这时我们说 x_0 是函数 $\dfrac{f}{g}$ 的**极点**; 整数 $k'-k$ 称为这极点的**阶**. 当 x 趋近于 x_0 时, $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|$ 趋近于 $+\infty$. 可约定这样开拓函数 $\dfrac{f}{g}$, 令它在点 x_0 的值为 "无穷大". 以后还要讲到引进这个唯一的无穷大的数, 记作 ∞.

如果 $f(x)$ 在点 x_0 解析, 并且以 x_0 为 $k(>0)$ 阶零点, 显然, $\dfrac{1}{f(x)}$ 以 x_0 为 k 阶极点.

定义　设函数 $f(x)$ 在开集 D' 上有定义并且解析, 而 D' 是由连通开集 D 中除去一些孤立点而得, 其中每个孤立点是 $f(x)$ 的一个**极点**. 这时我们说 $f(x)$ 是 D 内的**亚纯函数**.

因此在 D 内每一点 (无例外) 的邻域, f 可写成两解析函数之商的形式: $\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$, 其中分母不恒等于零. 我们用明显的方式定义两亚纯函数的和与积: 在 D 内亚纯的函数形成一个环, 甚至还形成一个代数. 事实上它们形成一个域, 这是因为: 如果 $f(x)$ 在 D 内不恒等于零, 那么由第 3 段中的定理, 它在 D 内任何点的邻域内不恒等于零. 因此 $\dfrac{1}{f(x)}$ 在 D 内每一点或者解析, 或者有极点, 从而 $\dfrac{1}{f(x)}$ 在 D 内亚纯.

命题 5.1　*D 内亚纯函数 f 的导数 f' 是在 D 内亚纯的函数, 函数 f 及 f' 有相同的极点. 如果 x_0 是 f 的 k 阶极点, 它就是 f' 的 $k+1$ 阶极点.*

事实上, 在 D 内不是 f 的极点的任何点, f' 有定义并且解析. 只需证明: 如果 x_0 是 f 的极点, x_0 也是 f' 的极点. 可是我们有: 对于与 x_0 邻近的 x,

$$f(x)=\frac{1}{(x-x_0)^k}g(x),$$

其中 $g(x)$ 解析, $g(x_0)\neq 0$, $k>0$. 因此对于 $x\neq x_0$,

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{1}{(x-x_0)^{k+1}}[(x-x_0)g'(x)-kg(x)]\\&=\frac{1}{(x-x_0)^{k+1}}g_1(x);\end{aligned}$$

又因 $g_1(x_0) \neq 0$, x_0 恰好是 f' 的 $k+1$ 阶极点.

习　题

1. 设 K 是交换域, X 是未知量, $E = K[[X]]$ 是系数在 K 内的形式幂级数代数. 对于 E 内的 S, T, 令

$$d(S,T) = \begin{cases} 0 & \text{如果 } S = T, \\ e^{-k} & \text{如果 } S \neq T, \text{ 并且 } \omega(S-T) = k. \end{cases}$$

a) 证明 d 确定集 E 内的一个距离.

b) 证明在 $E \times E$ 内确定, 在 E 内取值的两映射: $(S,T) \to S+T, (S,T) \to ST$ 对于度量 d 所确定的拓扑是连续的.

c) 证明多项式代数 $K[X]$ 作为 E 的子集, 在 E 内处处稠密.

d) 证明度量空间 E 是完备的. (如果 (S_n) 是 E 内的柯西序列, 那么注意, 对于任何整数 $m > 0$, 当 n 充分大时, S_n 的前 m 项与 n 无关.)

e) 映射 $S \to S'$ (S 的导数) 是否连续?

2. 设 p 及 q 是整数 $\geqslant 1$. 设有形式幂级数

$$S_1(X) = 1 + X + X^2 + \cdots + X^n + \cdots,$$

并且令

$$S_p(X) = (S_1(X))^p.$$

a) 对 n 递推证明下列关系式:

$$1 + p + \frac{p(p+1)}{2!} + \cdots + \frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!} = \frac{(p+1)\cdots(p+n)}{n!}, \tag{1}$$

并由此 (对 p 递推) 导出展开式

$$S_p(X) = \sum_{n \geqslant 0} \binom{p+n-1}{n} X^n, \tag{2}$$

其中 $\binom{k}{n}$ 表示二项式系数 $\dfrac{k!}{h!(k-h)!}$.

b) 应用 $S_p(X) \cdot S_q(X) = S_{p+q}(X)$, 证明下列关系式:

$$\sum_{0 \leqslant l \leqslant n} \binom{p+l-1}{l} \binom{q+n-l-1}{n-l} = \binom{p+q+n-1}{n}. \tag{3}$$

[它推广了 (1), 即 $q = 1$ 情形.]

3. 对于 $n \leqslant 5$, 作出 §1 命题 7.1 的证明中的多项式 P_n, 并且计算

$$S(X) = X - \frac{1}{3}X^3 + \frac{1}{5}X^5 + \cdots + (-1)^p \frac{1}{2p+1} X^{2p+1} + \cdots$$

的反形式级数中次数 $\leqslant 5$ 的各项.

4. 求下列级数的收敛半径:

a) $\sum_{n\geqslant 0} q^{n^2} z^n (|q| < 1)$,

b) $\sum_{n\geqslant 0} n^p z^n$($p$ 为整数 > 0),

c) $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$, 其中对于 $n \geqslant 0$, $a_{2n+1} = a^{2n+1}, a_{2n} = b^{2n}$; a 及 b 是实数, 并且 $0 < a$, $b < 1$.

5. 设有两形式幂级数:

$$S(X) = \sum_{n\geqslant 0} a_n X^n \quad \text{及} \quad T(X) = \sum_{n\geqslant 0} b_n X^n \quad (b_n \neq 0),$$

并且令

$$U(X) = \sum_{n\geqslant 0} (a_n)^p X^n, \quad V(X) = \sum_{n\geqslant 0} a_n b_n X^n, \quad W(X) = \sum_{n\geqslant 0} (a_n/b_n) X^n$$

(p 为整数). 证明下列关系式:

$$\rho(U) = (\rho(S))^p, \quad \rho(V) \geqslant \rho(S)\cdot\rho(T),$$

并且如果 $\rho(T) \neq 0$,

$$\rho(W) \leqslant \frac{\rho(S)}{\rho(T)}.$$

6. 设 a, b 及 c 在 $\mathbf{C}$ 内, 而 c 不是小于或等于 0 的整数. 下列级数

$$S(X) = 1 + \frac{ab}{c}X + \frac{a(a+1)\cdot b(b+1)}{2!c(c+1)}X^2 + \cdots + \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)\cdot b(b+1)\cdots(b+n-1)}{n!c(c+1)\cdots(c+n-1)}X^n + \cdots$$

的收敛半径是什么? 证明对于 $|z| < \rho(S)$, 这级数的和 $S(z)$ 满足下列微分方程:

$$z(1-z)S'' + (c - (a+b+1)z)S' - abS = 0.$$

7. 设 $S(X) = \sum_{n\geqslant 0} a_n X^n$ 是一形式幂级数, 而且 $\rho(S) = 1$. 对于 $n \geqslant 0$, 令

$$s_n = a_0 + \cdots + a_n, \quad t_n = \frac{1}{n+1}(s_0 + s_1 + \cdots + s_n),$$

并且

$$U(X) = \sum_{n\geqslant 0} s_n X^n, \quad V(X) = \sum_{n\geqslant 0} t_n X^n.$$

证明: (i) $\rho(U) = \rho(V) = 1$; (ii) 对于 $|z| < 1$,

$$\frac{1}{1-z}\left(\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n\right) = \sum_{n\geqslant 0} s_n z^n.$$

8. 设 $S(X) = \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n X^n$ 为形式幂级数, 其系数由下列递推关系式确定:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1; \quad \text{对于 } n \geqslant 2, \quad a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2},$$

这里 α, β 是两个已给实数.

a) 证明: 对于 $n \geqslant 1$, $|a_n| \leqslant (2c)^{n-1}$, 其中 $c = \max\left(|\alpha|, |\beta|, \dfrac{1}{2}\right)$; 并且由此导出: 收敛半径 $\rho(S) \neq 0$.

b) 证明: 对于 $|z| < \rho(s)$,

$$(1 - \alpha z - \beta z^2)S(z) = z,$$

并由此推出: 对于 $|z| < \rho(S)$, 我们有

$$S(z) = \frac{z}{1 - \alpha z - \beta z^2}. \tag{1}$$

c) 设 z_1, z_2 是 $\beta X^2 + \alpha X - 1 = 0$ 的两根. 把 (1) 式右边分成部分分式, 借助 z_1 及 z_2 求出 a_n 的表示式, 并且由此导出

$$\rho(S) = \mathrm{Min}\,(|z_1|, |z_2|).$$

(注意: 如果 $S(X) = S_1(X) + S_2(X)$, 我们有 $\rho(S) \geqslant \mathrm{Min}\,(\rho(S_1), \rho(S_2))$.)

9. 如果 x, y 是实数, n 是整数 $\geqslant 0$, $x \neq 2k\pi$ (k 为整数), 证明

$$\sum_{0\leqslant p\leqslant n} \cos(px + y) = \cos\left(\frac{n}{2}x + y\right) \sin\frac{n+1}{2}x \Big/ \sin\frac{x}{2},$$

$$\sum_{0\leqslant p\leqslant n} \sin(px + y) = \sin\left(\frac{n}{2}x + y\right) \sin\frac{n+1}{2}x \Big/ \sin\frac{x}{2}.$$

(应用 $\cos(px + y) + i\sin(px + y) = e^{i(px+y)} = e^{iy}(e^{ix})^p$.)

10. 证明: 对于任何 $z \in \mathbf{C}$, 下列不等式成立:

$$|e^z - 1| \leqslant e^{|z|} - 1 \leqslant |z|e^{|z|}.$$

11. 证明: 对于任何整数 $n \geqslant 1$ 及任何复数 z,

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = 1 + z + \sum_{2\leqslant p\leqslant n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{p-1}{n}\right) \frac{z^p}{p!},$$

并且由此推出, 对于任何复数 z, 我们有

$$e^z = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$$

12. 证明下式确定的复变数 z 的函数

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \left(\text{或 } \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)$$

是 §3 第 3 段所确定的函数 $\cos x$ (或 $\sin x$) 到整个平面 $\mathbf{C}$ 的解析开拓. 证明: 对于任何 $z, z' \in \mathbf{C}$, 有

$$\cos(z+z') = \cos z \cos z' - \sin z \sin z',$$
$$\sin(z+z') = \sin z \cos z' + \cos z \sin z';$$
$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1.$$

13. 证明: 对于实数 x, $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$ 时, 我们有

$$\frac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x.$$

14. 设 $z = x + iy$, x 及 y 是实数.

(i) 证明

$$|\sin(x+iy)|^2 = \sin^2 x + \mathrm{sh}^2 y,$$
$$|\cos(x+iy)|^2 = \cos^2 x + \mathrm{sh}^2 y;$$

(ii) 定出函数 $\sin az$, $\cos az$ 的零点 (其中 $a \neq 0$ 是实数);

(iii) 证明: 如果 $-\pi < a < \pi$, 并且如果 n 是正整数, 那么对于 $z = n + \dfrac{1}{2} + iy$, 有

$$\left|\frac{\sin az}{\sin \pi z}\right| \leqslant \frac{\mathrm{ch}\, ay}{\mathrm{ch}\, \pi y},$$

而对于 $z = x + i\left(n + \dfrac{1}{2}\right)$, 有

$$\left|\frac{\sin az}{\sin \pi z}\right| \leqslant \frac{\mathrm{ch}\, a\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\mathrm{sh}\, \pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}.$$

(请注意: 由定义, $\mathrm{ch}\, z = \cos(iz)$, $\mathrm{sh}\, z = -i \sin(iz)$.)

15. 设 I 是实直线 $\mathbf{R}$ 上的一个区间. 证明: 如果 $f(x)$ 是 I 内的 (单实变、复值) 解析函数, 那么我们可以把它开拓成为复平面上包含 I 的一个连通开集 D 内的解析函数.

16. (i) 设 (α_n), (β_n) 是具有下列性质的两数列:

a) 存在着一常数 $M > 0$, 使得对于任何 $n \geqslant 1$,

$$|\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n| \leqslant M;$$

b) β_n 是实数 $\geqslant 0$, 并且 $\beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \cdots \geqslant \beta_n \geqslant \cdots$. 证明: 对于任何 $n \geqslant 1$, 有

$$|\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots + \alpha_n\beta_n| \leqslant M\beta_1.$$

(引进 $s_n = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, 并且写出

$$\alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_n\beta_n = (\beta_1 - \beta_2)s_1 + \cdots + (\beta_{n-1} - \beta_n)s_{n-1} + \beta_n s_n.)$$

(ii) 设 $S(X)=\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n X^n$ 是复系数形式幂级数, 并设 $\rho(S)=1$, $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ 收敛. 应用 (i) 证明级数 $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ 在 $\mathbf{R}$ 的闭区间 $[0, 1]$ 上一致收敛, 并且由此推出

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ 0<x<1}} \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n = \sum_{n\geqslant 0} a_n.$$

(iii) 现设 $S(X)=\sum\limits_{n\geqslant 1} X^n/n^2$, 又设 D 是开圆盘 $|z|<1$ 及开圆盘 $|z-1|<1$ 的交集. 证明存在着一个常数 a, 使得对于 $z\in D$, 我们有

$$S(z)+S(1-z)=a-\log z\,\log(1-z),$$

其中 log 表示复对数在 (含 D 的) 半平面 $\mathrm{Re}\,(z)>0$ 内的主支.

(注意: 如果 $z\in D$, 我们有 $\log(1-z)=-T(z)$, 其中

$$T(X)=X\cdot S'(X);$$

这是由 §3 中命题 6.1 推出的. 又由 §3 中命题 6.2, 对于 $z\in D$, 我们有:

$$\frac{d}{dz}(\log z\,\log(1-z))=\frac{\log(1-z)}{z}-\frac{\log z}{1-z}.\Big)$$

然后应用 (ii) 证明:

$$a=\sum_{n\geqslant 1} 1/n^2,$$

$$a-(\log 2)^2=\sum_{n\geqslant 1} 1/n^2 2^{n-1}.$$

(比较第五章 §2 的 2 段命题 2.1 的应用.)

第二章　全纯函数, 柯西积分

§1. 曲线积分

1. 概论

我们回顾一下关于平面 $\mathbf{R}^2$ 中曲线积分的若干初等概念.

用 x 及 y 表示 $\mathbf{R}^2$ 中的坐标函数.

设有线段 $[a,b]$ 到平面 $\mathbf{R}^2$ 的映射

$$t \to \gamma(t), \tag{1.1}$$

当点 $\gamma(t)$ 的坐标 $x(t)$ 及 $y(t)$ 是连续可微函数时, 这一映射称为一条**可微道路**. 我们总假定 $a < b$. γ 的**起点**是点 $\gamma(a)$, γ 的**终点**是点 $\gamma(b)$. 如果 D 是平面上的开集, 那么当函数 γ 在 D 内取值时, 我们说 γ 是开集 D 内的可微道路.

开集 D 内的微分形式是表示式

$$\omega = P\,dx + Q\,dy,$$

其中系数 P 及 Q 是在 D 内连续的 (实值或复值) 函数.

如果 γ 是 D 内的可微道路, 并且 ω 是 D 内的微分形式, 我们用下列公式定义积分 $\int_\gamma \omega$:

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \gamma^*(\omega),$$

其中 $\gamma^*(\omega)$ 表示由下式确定的微分形式 $f(t)dt$:

$$f(t) = P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t);$$

换句话说, $\gamma^*(\omega)$ 是从 ω 中作变量代换 $x=x(t), y=y(t)$ 而得的微分形式. 这样,

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b f(t)dt.$$

现考虑对于 $a_1 \leqslant u \leqslant b_1$ $(a_1 < b_1)$ 连续可导的函数 $t=t(u)$, 其导数 $t'(u)$ 处处 >0, 并且 $t(a_1)=a, t(b_1)=b$. 映射 $u \to t(u)$ 及映射 (1.1) 的复合映射是

$$u \to \gamma(t(u)). \tag{1.2}$$

它确定一条可微道路 γ_1. 我们说 γ_1 是由 γ_1 **改换参数**而得. 根据求复合函数的导数的公式, 由 ω 通过映射 (1.2) 的变换而得的微分形式 $f_1(u)du$ 等于

$$f(t(u))t'(u)du.$$

由单变量积分中改换变量的公式, 可得关系式

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1} \omega.$$

换句话说, 如果把可微道路 γ 换成从 γ 通过改变参数而得的另一可微道路, 曲线积分 $\int_\gamma \omega$ 的值不改变. 因此由改变参数相互推导出的道路, 可用同一字母表示.

现取对于 $a_1 \leqslant u \leqslant b_1$ 是连续可导的函数 $t=t(u)$, 而且 $t'(u)<0, t(a_1)=b, t(b_1)=a$ (线段的 "通过方向" 反过来了). 这时我们看到 $\int_{\gamma_1}\omega = -\int_\gamma \omega$. 于是说, 对 γ 作了使 γ 变向的参数变换, 其结果就是用 -1 乘 $\int_\gamma \omega$.

把参数 t 所描成的区间 $[a,b]$ 细分为有限个子区间:

$$[a,t_1],\ [t_1,t_2],\cdots,[t_{n-1},t_n],\ [t_n,b],$$

假定 $a<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n<b$. 设 γ_i 是映射 γ 在上列第 i 个区间上的限制, 显然

$$\int_\gamma \omega = \sum_i \left(\int_{\gamma_i} \omega\right).$$

这一性质可导致推广可微道路的概念. 连续映射

$$\gamma:[a,b]\to \mathbf{R}^2$$

称为**分段可微**道路, 只要存在着和上面一样把 $[a,b]$ 分成有限个子区间的一种细分法, 使得 γ 在这些子区间上的限制连续可导. 作为定义, 令

$$\int_\gamma \omega = \sum_{i=1}^{n+1} \left(\int_{\gamma_i} \omega\right).$$

上式右边的值与 γ 的分法无关. γ_1 的起点称为 γ 的起点, γ_{n+1} 的终点称为 γ 的终点. 如果 γ 的起点与终点重合, 我们说这条道路是**封闭的**.

封闭道路 γ 也可不取从 a 到 b 变化的实参数 t 来确定, 而取描出单位圆周的参数 θ 来确定.

例 考虑 $\mathbf{R}^2$ 平面上边与坐标轴平行的矩形 A 的周界 (或 "边界"), 这矩形是满足下列条件的点 (x,y) 的集:

$$a_1 \leqslant x \leqslant a_2, \quad b_1 \leqslant y \leqslant b_2.$$

它的边界由四条直线段组成:

$$\begin{aligned} x = a_2, &\quad b_1 \leqslant y \leqslant b_2, \\ y = b_2, &\quad a_1 \leqslant x \leqslant a_2, \\ x = a_1, &\quad b_1 \leqslant y \leqslant b_2, \\ y = b_1, &\quad a_1 \leqslant x \leqslant a_2. \end{aligned}$$

为了使得这边界确定一条分段可微封闭道路 γ, 必须确定所选择的 "通过方向", 我们总是约定通过方向如下:

在边 $x = a_2$ 上, y 从 b_1 增大到 b_2; 在边 $y = b_2$ 上, x 从 a_2 减小到 a_1; 在边 $x = a_1$ 上, y 从 b_2 减小到 b_1; 在边 $y = b_1$ 上, x 从 a_1 增大到 a_2.

这时积分 $\int_\gamma \omega$ 就已确定, 它与 γ 的起点的选取无关, 这是由于无论怎样, 它总是等于沿四条边, 按上述通过方向所取积分的和.

2. 微分形式的原函数

引理 *设 D 是平面上的连通开集. 无论点 $a \in D$ 及 $b \in D$ 为何, 存在着包含在 D 内的一条分段可微道路, 以 a 为起点, 以 b 为终点.* (简单地说就是: a 及 b 可用分段可微道路连接起来.)

证明 任何点 $c \in D$ 是含在 D 内一个圆盘的心, c 与这圆盘内任何点能用含在 D 内的分段可微道路, 譬如说半径连接起来. 设已给一点 $a \in D$, 如果 c 能与 a 连接起来, 由上述, 与 c 充分接近的任何点也能与 a 连接起来, 因此 D 中能与 a 连接起来的点所成的集 E 是开集. 另一方面, E 在 D 内是闭的. 因为如果 $c \in D$ 是 E 的聚点, 那么由上述方法, c 能与 E 内一点连接起来, 因而能与 a 连接起来. 由假设, D 是连通的, 而 D 的子集 E 在 D 内既是开的, 又是闭的, 并且不是空的 (由于 $a \in E$), 因此 E 就是整个 D. 证完.

设 D 是平面上的连通开集, 设 γ 是 D 内的一条分段可微道路, 其起点为 a, 终点为 b. 设 F 是在 D 内连续可微的函数, 考虑微分形式 $\omega = dF$. 于是有明显的关系式

$$\int_\gamma dF = F(b) - F(a). \tag{2.1}$$

据此并由引理可推出: *如果微分 dF 在 D 内恒等于零, 则函数 F 在 D 内为常数.*

设已给在连通开集 D 内的一个微分形式 ω, 现研究是否有在 D 内连续可微的函数 $F(x,y)$, 使得 $dF=\omega$. 如果 $\omega=P\,dx+Q\,dy$, 关系式 $dF=\omega$ 等价于

$$\frac{\partial F}{\partial x}=P, \quad \frac{\partial F}{\partial y}=Q. \tag{2.2}$$

这样的函数 F 如果存在, 就称它为微分形式 ω 的一个**原函数**. 这时任何其他原函数 G 可由 F 加一常数而得, 这是由于 $d(F-G)=0$.

命题 2.1 要使得微分形式 ω 在 D 内有原函数, 必须而且只需对于 D 内任何分段可微闭道路 γ, 我们有 $\int_\gamma \omega=0$.

证明 1° 条件是必要的. 因为如果 $\omega=dF$, 关系式 (2.1) 表明: 只要 γ 的起点 a 与终点 b 重合, $\int_\gamma \omega=0$.

2° 条件是充分的. 事实上, 选取一点 $(x_0,y_0)\in D$, (由引理) 任何点 $(x,y)\in D$ 与 (x_0,y_0) 可以用在 D 内的一条分段连续可微道路 γ 连续起来. 因为由假设, 对于任何封闭道路, 积分 $\int_\gamma \omega$ 为零, 所以积分 $\int_\gamma \omega$ 与 γ 的选取无关. 设 $F(x,y)$ 是关于 D 内起点为 (x_0,y_0), 终点为 (x,y) 的道路 γ 的积分 $\int_\gamma \omega$ 的公有值. 我们要证明在 D 内这样确定的函数 F 满足关系式 (2.2).

给予 x 一个小的增量 h, 差式

$$F(x+h,y)-F(x,y)$$

等于沿着 D 内起点为 (x,y), 终点为 $(x+h,y)$ 的任一条道路的积分 $\int\omega$. 特别, 让我们沿着平行于 x 轴的一条直线段积分 (如果 $|h|$ 足够小, 这是可能的):

$$F(x+h,y)-F(x,y)=\int_x^{x+h} P(\xi,y)d\xi,$$

从而, 如果 $h\neq 0$,

$$\frac{F(x+h,y)-F(x,y)}{h}=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} P(\xi,y)d\xi.$$

当 h 趋近于 0 时, 由于函数 P 连续, 上式右边趋近于 $P(x,y)$. 因此我们确实有

$$\frac{\partial F}{\partial x}=P(x,y).$$

同样可证明 $\dfrac{\partial F}{\partial y}=Q(x,y)$. 命题 2.1 得证.

特别考虑 D 内边与坐标轴平行的矩形 (设整个矩形, 即其内部与边界都含在 D 内). 如果 γ 是这样一个矩形的边界, 要使得微分形式 ω 在 D 内有原函数, 必须有 $\int_\gamma \omega=0$. 以后将要看到, 这一必要条件并不总是充分的. 然而当 D 是 “单连通的” 时 (参看第 7 段), 这条件是充分的. 暂时我们只证明:

命题 2.2 设 D 为一开圆盘. 如果只要 γ 是 D 内边与坐标轴平行的矩形的边界, 我们有 $\int_\gamma \omega = 0$, 那么 ω 在 D 内有原函数.

证明 设 (x_0, y_0) 是圆盘 D 的心, (x, y) 是 D 内任一点. 以 (x_0, y_0) 为起点, 以 (x, y) 为终点, 有两条道路 γ_1 及 γ_2, 其中每一条由以 (x_0, y_0) 及 (x, y) 为相对顶点 (边与坐标轴平行) 的矩形的两边组成 (见图 1). 因为这矩形包含在 D 内, 我们有 $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$. 设 $F(x, y)$ 是这两积分的公有值, 与上面一样, 可证明 $\dfrac{\partial F}{\partial x} = P, \dfrac{\partial F}{\partial y} = Q$. 命题证完.

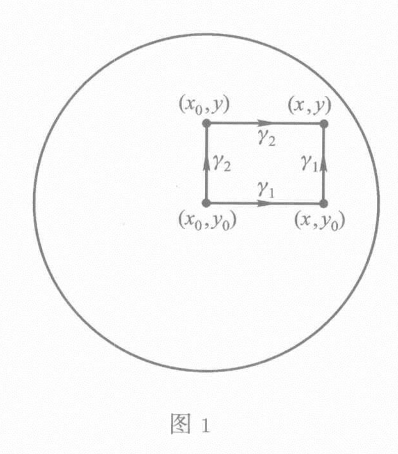


图 1

3. 格林 – 黎曼公式

在一定意义下, 这公式推广了关系式 (2.1): 它把重积分与曲线积分的值联系起来, 而不是把单积分与函数的值联系起来. 设 A 是边与坐标轴平行的矩形, γ 为其边界, 设 $P(x, y)$ 及 $Q(x, y)$ 是在 A 的邻域 D 内确定的函数, 它们在 D 内连续, 并且有连续的偏导数 $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 及 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$. 格林 – 黎曼公式可写成

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy. \tag{3.1}$$

证明 例如要证明

$$\int_\gamma Q\,dy = \iint_A \frac{\partial Q}{\partial x} dx\,dy.$$

我们知道连续函数 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 的二重积分可计算如下:

$$\iint_A \frac{\partial Q}{\partial x} dx\,dy = \int_{b_1}^{b_2} dy \left(\int_{a_1}^{a_2} \frac{\partial Q}{\partial x} dx\right).$$

具体算出 $\int_{a_1}^{a_2} \frac{\partial Q}{\partial x} dx = Q(a_2, y) - Q(a_1, y)$. 然后对 y 积分, 求得

$$\int_{b_1}^{b_2} Q(a_2, y)dy - \int_{b_1}^{b_2} Q(a_1, y)dy,$$

这恰好等于 $\int_\gamma Q\,dy$. 证完.

格林 – 黎曼公式对于比矩形更一般的区域成立, 现对这问题暂不讨论.

命题 3.1 设 $\omega = P\,dx + Q\,dy$ 是在连通开集 D 内的微分形式, 并假定偏导数 $\frac{\partial P}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial Q}{\partial x}$ 存在且连续. 那么为了使得 ω 在 D 内有原函数, 关系式

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{3.2}$$

是必要的; 当 D 为开圆盘时, 它是充分的.

证明 根据公式 (3.1), 只要 γ 是 D 内矩形的边界, 由条件 (3.2) 可推出 $\int_\gamma \omega = 0$. 如果 D 是开圆盘, 由此可推出 ω 有原函数 (命题 2.2). 反之, 如果 $\int_\gamma \omega = 0$, 只要 γ 是 D 内边与坐标轴平行的矩形 A 的边界, 那么对于这种矩形 A, 我们有

$$\iint_A \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx\,dy = 0. \tag{3.3}$$

而由此可推出关系式 (3.2). 事实上, 如果连续函数 $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}$ 在 D 内不恒等于零, 那么在 D 内应有一点, 在其邻域内, 这函数譬如说 > 0, 从而对于这邻域内的矩形 A, 积分

$$\iint_A \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx\,dy$$

应大于零, 与假设 (3.3) 矛盾. 命题 3.1 得证.

4. 闭微分形式

定义 设有一微分形式 $\omega = P\,dx + Q\,dy$, 其系数 P 及 Q 在开集 D 内连续. 如果 D 内任何点 (x_0, y_0) 有一开邻域, 在其中 ω 有原函数, 那么我们说 ω 是**闭的**. 可假定有关邻域是以 (x_0, y_0) 为心的圆盘. 于是由第 2 段及第 3 段的结果可立即推出:

命题 4.1 为了使得系数在 D 内连续的微分形式 ω 是闭的, 必须而且只需: 只要 γ 是 D 内边与坐标轴平行的小矩形 (其内部也在 D 内) 的边界, 我们有 $\int_\gamma \omega = 0$. 如果还假定 P 及 Q 有连续的一阶偏导数, 那么为了使得 ω 是闭的, 条件 (3.2) 是必要并且充分的.

由命题 2.2, 在开圆盘内的任何闭形式在其中有原函数. 现举一例: 在一连通开集 D 内有一闭形式 ω, 它在 D 内没有原函数.

命题 4.2　设 D 是复平面 $\mathbf{C}$ 上所有点 $z \neq 0$ 所成的开集. 形式 $\omega = dz/z$ 在 D 内是闭的, 但在 D 内没有原函数.

事实上, 在每一点 $z_0 \neq 0$ 的邻域内, 有 $\log z$ 的一个分支, 并且这分支是 dz/z 在 z_0 的邻域内的一个原函数. 因此 ω 是闭的. 为了证明 ω 在 D 内没有原函数, 只需在 D 内找出一条闭道路 γ, 使得 $\int_\gamma \dfrac{dz}{z} \neq 0$. 设 γ 是心在原点的单位圆, 其走向为正向. 为了计算 $\int_\gamma \omega$, 令 $z = e^{it}$, 其中 t 从 0 变到 2π. 于是我们有

$$dz = ie^{it}dt, \quad \frac{dz}{z} = i\,dt,$$

从而

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} i\,dt = 2i\pi \neq 0, \tag{4.1}$$

证完.

在上例中, 形式 ω 是复的. 现取 ω 的虚部. 既然

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx + i\,dy}{x + iy} = \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2} + i\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2},$$

微分形式

$$\omega = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$$

在除去原点的平面内是闭的. 它没有原函数, 这是因为根据 (4.1), 如果 γ 是单位圆, 其走向为正向, 我们有

$$\int_\gamma \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} = 2\pi.$$

事实上, ω 是 $\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}$ 的微分, 而后者在除去原点的平面内为一多值函数 (即有许多分支).

5. 非单值原函数的研究

设 ω 是在连通开集 D 内确定的闭形式. 虽然 ω 在 D 内不一定有 (单值) 原函数, 我们将确定 ω 沿 D 内一条道路 γ 的原函数的含义. 这样的道路由一线段 $I = [a, b]$ 到 D 内的一个连续映射所确定. 这里我们对可微性不作任何假设.

定义　设 $\gamma : [a, b] \to D$ 是开集 D 内的道路, 并且设 ω 是 D 内的闭微分形式. 满足下列条件的连续函数 $f(t)$ (t 走遍 $[a, b]$) 称为 ω 沿 γ 的**原函数**:

(P) 对于任何 $\tau \in [a, b]$, 在 $\gamma(\tau) \in D$ 的邻域内, 有 ω 的原函数 F: 当 t 与 τ 充分接近时,

$$F(\gamma(t)) = f(t). \tag{5.1}$$

定理 1　这样的原函数总存在, 并且除去可相差一常数外是唯一的.

证明 首先, 如果 f_1 及 f_2 是两个这样的原函数, 由 (5.1), 在每个 $\tau \in [a,b]$ 的邻域内, 其差 $f_1(t)-f_2(t)$ 有 $F_1(\gamma(t))-F_2(\gamma(t))$ 的形状. 因为 ω 的两原函数的差式 F_1-F_2 是常数, 所以在线段 I 上每点的邻域内, 函数 $f_1(t)-f_2(t)$ 是常数. 我们说函数 f_1-f_2 局部为常数来表明这一事实. 而在连通拓扑空间上 (这里是在线段 $I=[a,b]$ 上), 连续且局部为常数的函数必为常数. 事实上, 对于任何数 u, 空间中使函数等于 u 的点所成的集同时是开的及闭的.

还要证明存在着满足条件 (P) 的连续函数 $f(t)$. 每点 $\tau \in I$ 有一邻域 (在 I 内), γ 把它映射到一开圆盘内, 而 ω 在这开圆盘内有原函数 F. 既然 I 是紧的, 可找到有限个点列

$$a=t_0<t_1<\cdots<t_n<t_{n+1}=b,$$

使得对于满足 $0 \leqslant i \leqslant n$ 的任何整数 i, γ 把线段 $[t_i, t_{i+1}]$ 映射到开圆盘 U_i 内, 而在 U_i 内 ω 有原函数 F_i. 交集 $U_i \cap U_{i+1}$ 含有 $\gamma(t_{i+1})$, 因而不是空集; 它是连通集, 从而 $F_{i+1}-F_i$ 在 $U_i \cap U_{i+1}$ 内是常数. 于是对每个 F_i 加上适当的常数, 可以逐步使得 F_{i+1} 在 $U_i \cap U_{i+1}$ 内与 F_i 恒等. 现设 $f(t)$ 是下式确定的函数:

$$f(t)=F_i(\gamma(t)), \quad \text{对于 } t \in [t_i, t_{i+1}].$$

显然 $f(t)$ 连续, 并且满足条件 (P): 对于异于 t_i 的值 τ, 这是清楚的. 请读者证明 τ 等于 t_i 中之一的情况.

注意 假定 γ 分段可微, 换句话说, 可把 I 细分, 使得 γ 在每个部分线段 $[t_i, t_{i+1}]$ 上的限制连续可微. 于是积分 $\int_\gamma \omega$ 可以确定. 按定义, 它就是

$$\sum_i \left(\int_{\gamma_i} \omega\right).$$

如果 f 是沿 γ 的原函数, 由公式 (2.1), 我们有

$$\int_{\gamma_i} \omega = f(t_{i+1})-f(t_i),$$

由此相加, 得

$$\int_\gamma \omega = f(b)-f(a). \tag{5.2}$$

这样, 可对连续道路 γ 确定 $\int_\gamma \omega$, 而对 γ 不作可微性的假设, 我们可把关系式 (5.2) 取作定义. 因为这式右边与原函数 f 沿 γ 的取法无关, 所以这样下定义是合理的.

命题 5.1 如果 γ 是不过原点的封闭道路, 那么 $\dfrac{1}{2\pi i}\int_\gamma \dfrac{dz}{z}$ 是整数.

证明 $\omega=\dfrac{dz}{z}$ 是闭形式. 在定理 1 的证明中, 可设每个 F_i 是 $\log z$ 的一个分支. 因此 $f(b)-f(a)$ 是 $\log z$ 的两个分支在点 $\gamma(a)=\gamma(b)$ 的差, 从而具有形状 $2\pi i\,n$, 其中 n 是整数.

系　$\dfrac{1}{2\pi}\int_\gamma \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$ 是整数 (与上面相同的整数).

数量 $\int_\gamma \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$ 往往称为在点 $z = x + iy$ 描出道路 γ 时 (无论 γ 是闭的或否), 这点的**辐角的变化**.

6. 同伦

为了简单起见, 我们要考虑的所有道路的参数在线段 $I = [0,1]$ 上变化.

定义　已给具有相同起点及终点的两条道路

$$\gamma_0 : I \to D \quad 及 \quad \gamma_1 : I \to D$$

(亦即 $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$, $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$). 如果存在着从 $I \times I$ 到 D 内的连续映射 $(t,u) \to \delta(t,u)$, 使得

$$\begin{cases} \delta(t,0) = \gamma_0(t), & \delta(t,1) = \gamma_1(t), \\ \delta(0,u) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0), & \delta(1,u) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1), \end{cases} \tag{6.1}$$

那么我们说 γ_0 及 γ_1 是 (在 D 内) **具有固定端点的同伦道路**.

固定 u, 映射 $t \to \delta(t,u)$ 是 D 内一条道路 γ_u, 其起点及终点都与 γ_0 及 γ_1 相同. 直观看来, 当 u 从 0 变到 1 时, 这条道路连续变形, 但其端点保持不变.

关于两条封闭道路 γ_0 及 γ_1 情形, 有类似的定义: 如果存在着从 $I \times I$ 到 D 内的连续映射 $(t,u) \to \delta(t,u)$, 使得

$$\begin{cases} \delta(t,0) = \gamma_0(t), & \delta(t,1) = \gamma_1(t), \\ \delta(0,u) = \delta(1,u), & 无论\ u\ 是什么 \end{cases} \tag{6.2}$$

(因此对于每个 u, 道路 γ_u 是封闭道路), 那么我们说 γ_0 及 γ_1 是 (D 内的) **同伦封闭道路**. 特别, 如果在上述情形中, 函数 $\gamma_1(t)$ 还是常数, 那么我们说封闭道路 γ_0 在 D **内与一点同伦**.

定理 2　*如果 γ_0 及 γ_1 是 D 内具有固定端点的两条同伦道路, 那么无论 D 内的闭形式 ω 是什么, 我们有*

$$\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega.$$

定理 2′　*如果 γ_0 与 γ_1 是 D 中两条封闭道路, 而且作为封闭道路, 它们是同伦的, 那么对于 D 内任何闭形式 ω, 我们有*

$$\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega.$$

这两定理可以作为以下引理的推论来证明. 首先作出下列定义:

定义 设 $(t,u)\to\delta(t,u)$ 是从矩形

$$a\leqslant t\leqslant b,\quad a'\leqslant u\leqslant b' \tag{6.3}$$

到开集 D 内的连续映射, 设 ω 是 D 内的闭形式. 在矩形内连续并满足下列条件的连续函数 $f(t,u)$ 称为 ω **关于映射 δ 的原函数**:

(P′) 无论矩形中的点 (τ,ν) 是什么点, 在 $\delta(\tau,\nu)$ 的邻域内有 ω 的原函数 F, 使得在与 (τ,ν) 充分接近的任何点 (t,u), 我们有

$$F(\delta(t,u))=f(t,u).$$

引理 这样的原函数总存在, 并且除了相差一常数外是唯一的.

这引理可以说是定理 1 的推广. 现用类似的方法证明它. 应用矩形的紧性, 可用点 t_i 细分 t 的变化区间, 用点 u_j 细分 u 的变化区间, 把矩形细分成小格, 使得无论 i 及 j 是什么, 线段 $[t_i,t_{i+1}]$ 及 $[u_j,u_{j+1}]$ 的积所构成的小矩形被 δ 映射到一个开圆盘 $U_{i,j}$ 内; 在这开圆盘内, 存在着 ω 的一个原函数 $F_{i,j}$.

固定 j, 由于交集 $U_{i,j}\cap U_{i+1,j}$ 不是空的 (并且是连通的), 可以对每个 $F_{i,j}$ (j 固定, i 变化) 加上一常数, 使得 $F_{i,j}$ 及 $F_{i+1,j}$ 在 $U_{i,j}\cap U_{i+1,j}$ 内恒等. 于是对于 $u\in[u_j,u_{j+1}]$, 得到一个函数 $f_j(t,u)$, 使得对于任何 i, 我们有: 当 $t\in[t_i,t_{i+1}]$ 时,

$$f_j(t,u)=F_{i,j}(\delta(t,u)).$$

这样, $f_j(t,u)$ 在矩形

$$a\leqslant t\leqslant b,\quad u_j\leqslant u\leqslant u_{j+1}$$

上连续, 它是 ω 关于映射 δ_j 的原函数, 这里 δ_j 是 δ 在上列矩形上的限制. 每个函数 f_j 除去差一常数外是确定的, 于是对 j 递推, 可选择加上的常数, 使得当 $u=u_{j+1}$ 时, 函数 $f_j(t,u)$ 及 $f_{j+1}(t,u)$ 相等. 现设 $f(t,u)$ 是在矩形 (6.3) 上由下列条件确定的函数: 对于任何 j, 我们有: 当 $u\in[u_j,u_{j+1}]$ 时,

$$f(t,u)=f_j(t,u).$$

这是满足条件 (P′) 的连续函数, 因而它正好是 ω 关于映射 δ 的原函数. 引理得证.

定理 2 的证明 设 δ 是满足条件 (6.1) 的连续映射. 设 f 是 ω 关于 δ 的一个原函数. 显然, f 在矩形 $I\times I$ 的垂直边 $t=0$ 及 $t=1$ 上是常数. 因此我们有

$$f(0,0)=f(0,1),\quad f(1,0)=f(1,1);$$

又因

$$\int_{\gamma_0}\omega=f(1,0)-f(0,0),\quad \int_{\gamma_1}\omega=f(1,1)-f(0,1),$$

定理 2 得证.

定理 2′ 的证明和这完全类似, 我们要应用满足 (6.2) 的一个映射 δ.

7. 单连通开集内的原函数

定义 如果开集 D 是连通的, 并且如果 D 内所含任何闭道路与 D 内一点同伦, 我们说 D 是**单连通的**.

定理 3 *单连通开集 D 内的任何闭微分形式 ω 在 D 内有原函数.*

事实上, 由定理 2′, 对 D 内所含任何封闭道路 γ, 我们有 $\int_\gamma \omega = 0$. 根据命题 2.1, 由此可推出 ω 在 D 内有原函数.

特别, 在不含 $z = 0$ 的任何单连通开集内, 闭形式 dz/z 有原函数. 换句话说, *$\log z$ 在不含 $z = 0$ 的任何单连通开集内有分支.*

单连通开集的例 设 a 是平面集 E 内一点, 如果无论点 $z \in E$ 是什么, 连接 a 与 z 的直线段含在 E 内, 那么我们说集 E 关于点 a 是**星形的**.

关于 D 内一点 a 为星形的任何开集是单连通的. 事实上, D 显然是连通的, 而且对于含在 0 及 1 之间的每个实数 u, 心为 a, 比为 u 的位似变换把 D 变换到 D 内. 当 u 从 1 递减到 0 时, 这种位似变换确定了任一封闭曲线与一点的同伦.

特别, 任何凸开集是单连通的. 事实上, 凸开集是关于其中任一点的星形集.

反之, 除去原点的平面不是单连通的. 例如, 圆 $|z| = 1$ 不与 $\mathbf{C} - \{0\}$ 内一点同伦, 因闭形式 $\dfrac{dz}{z}$ 沿这圆的积分 $\int \dfrac{dz}{z}$ 不等于零 (参看关系式 (4.1)).

作为练习, 读者可 (对连通开集 D) 证明下列四性质等价:

a) D 是单连通的;

b) 从圆 $|z| = 1$ 到 D 内的任何连续映射可开拓为从圆盘 $|z| \leqslant 1$ 到 D 内的连续映射;

c) 从正方形的边界到 D 内的任何连续映射可开拓为从正方形到 D 内的连续映射;

d) 如果 D 内两条道路有相同的端点, 它们是具有固定端点的同伦道路.

8. 封闭道路的指标

定义 设 γ 是平面 $\mathbf{C}$ 上的封闭道路, 又设 a 是 $\mathbf{C}$ 中一点, 但不属于 γ 的像. 积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-a} \tag{8.1}$$

的值称为 γ 关于 a 的**指标**,记作 $I(\gamma, a)$.

由命题 5.1, 指标 $I(\gamma, a)$ 是整数.

回到定义, 我们看到, 为了计算指标, 必须求对 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 确定的复值连续函数 $f(t)$, 使得

$$e^{f(t)} = \gamma(t) - a,$$

于是有

$$I(\gamma, a) = \frac{f(1) - f(0)}{2\pi i}.$$

指标的性质

1) 点 a 固定, 当封闭道路 γ 连续变动但不经过 a 时, 指标 $I(\gamma, a)$ 保持为常数. 事实上, 积分 (8.1) 连续变动, 其值在每一时刻为整数, 因此它保持为常数.

2) 闭道路 γ 固定, 当 a 在 γ 的映像的余集中变动时, $I(\gamma, a)$ 是 a 的局部为常数的函数. 证明同 1). 由此可见, $I(\gamma, a)$ 是 a 的函数, 它在 γ 的像之余集的每一连通支集中为常数.

3) 如果 γ 的像含在不含点 a 的单连通开集 D 内, 指标 $I(\gamma, a)$ 为零. 事实上, 这时封闭道路 γ 可在 D 内变动成为一点, 因而不经过 a, 然后只需应用 1).

4) 如果 γ 是按正向画成的圆, 那么当 a 在圆外部时, $I(\gamma, a)$ 等于 0; 当 a 在圆内部时, 它等于 1.

a 在圆外部情形可由 3) 推出; 当 a 在圆内部时, 由 2), 只需考察 a 是圆心情形, 然后应用关系式 (4.1).

命题 8.1 设 f 是从闭圆盘 $x^2 + y^2 \leqslant r^2$ 到平面 $\mathbf{R}^2$ 的连续映射, γ 是 f 在圆 $x^2 + y^2 = r^2$ 上的限制. 如果平面上一点 a 不属于 γ 的像, 并且如果指标 $I(\gamma, a) \neq 0$, 那么 f 在开圆盘 $x^2 + y^2 < r^2$ 内至少取值 a 一次.

事实上, 用反证法, 假定 f 不取值 a. f 在心为 0 的同心圆上的限制确定闭道路 γ 到一点的连续变形. 因此积分 $\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$ 为零, 与假设相矛盾.

定义 设 γ_1 及 γ_2 是不经过原点 0 的两条封闭道路. 映射

$$t \to \gamma_1(t) \cdot \gamma_2(t)$$

所确定的封闭道路称为这两条道路的**乘积**, 上式右边的点表示复数 $\gamma_1(t)$ 及 $\gamma_2(t)$ 的乘积.

命题 8.2 两条不经过 0 的封闭道路之乘积关于原点的指标, 等于这两封闭道路中每一条的指标的和, 换句话说,

$$I(\gamma_1\gamma_2, 0) = I(\gamma_1, 0) + I(\gamma_2, 0).$$

事实上, 设 $f_1(t)$ 及 $f_2(t)$ 是满足下列两式的两个复值连续函数:

$$e^{f_1(t)} = \gamma_1(t), \quad e^{f_2(t)} = \gamma_2(t).$$

设 $\gamma(t) = \gamma_1(t) \cdot \gamma_2(t)$ 是两闭曲线的乘积, 函数 $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$ 满足

$$e^{f(t)} = \gamma(t),$$

并且我们有

$$I(\gamma,0)=\frac{f(1)-f(0)}{2\pi i}=\frac{f_1(1)-f_1(0)}{2\pi i}+\frac{f_2(1)-f_2(0)}{2\pi i}$$
$$=I(\gamma_1,0)+I(\gamma_2,0),$$

这样就证明了命题.

命题 8.3 设 γ 及 γ_1 是平面 $\mathbf{C}$ 上两条封闭道路. 如果 γ 不取值 0, 并且如果总有 $|\gamma_1(t)|<|\gamma(t)|$, 那么映射 $t\to\gamma(t)+\gamma_1(t)$ 不取值 0, 并且我们有

$$I(\gamma+\gamma_1,0)=I(\gamma,0).$$

事实上, 可以写出

$$\gamma(t)+\gamma_1(t)=\gamma(t)\cdot\left(1+\frac{\gamma_1(t)}{\gamma(t)}\right);$$

封闭道路 $t\to 1+\dfrac{\gamma_1(t)}{\gamma(t)}$ 关于原点的指标为 0, 这是由于它包含在心为 1, 半径为 1 的开圆盘内. 这样, 封闭道路 $\gamma+\gamma_1$ 是封闭道路 γ 及 $1+\dfrac{\gamma_1}{\gamma}$ 的乘积, 于是应用命题 8.2, 即得命题 8.3.

9. 补充: 紧集的有向边界

引理 如果道路 γ 连续可微, 并且如果 γ' 处处 $\neq 0$, 那么在参数 t 的每一值的邻域内, 映射 $t\to\gamma(t)$ 是单射, 并且它的像 (局部) 分平面为两区域.

这一引理的确切含义将在以下证明中说明. 设 $t\to\gamma(t)$ 是从线段 $[a,b]$ 到平面 $\mathbf{R}^2$ 的连续可微映射. 设对 t 的任何值, 导数 $\gamma'(t)\neq 0$. 因此点 $\gamma(t)$ 的坐标 x,y 是连续可微函数 $\gamma_1(t)$ 及 $\gamma_2(t)$, 并且其导数 $\gamma_1'(t)$ 及 $\gamma_2'(t)$ 不同时为零. 于是由隐函数定理, 如果 t_0 是区间的内点 (亦即 $a<t_0<b$), 并且如果令 $x_0=\gamma_1(t_0)$, $y_0=\gamma_2(t_0)$, 那么存在着从点 $(t_0,0)$ 的开邻域 U 到点 (x_0,y_0) 的开邻域 V 上的连续可微映射 $(t,u)\to\delta(t,u)$, 满足下列条件:

(i) $\delta(t,0)=\gamma(t)$;

(ii) δ 是从 U 到 V 上的同胚, 其雅可比行列式在 U 中任一点处 >0 (因此 δ 保持 "定向").

这样, 由 δ 的逆同胚, V 同胚映射到 U 上, 道路 γ 上的点映射成直线 $u=0$ 上的点. 因此 γ 在 V 内的余集中的点分成两个开集 V^+ 及 V^-: 即对应于 $u>0$ 及 $u<0$ 的点所成的集. 如果把 U 取作心为 $(t_0,0)$ 的开圆盘, 开集 V^+ 及 V^- 是连通的. 于是道路 γ 把开集 V 分成两个连通的部分, 引理得证.

定义 设 K 是平面 $\mathbf{C}$ 上的紧集, 又设 $\Gamma=(\Gamma_i)_{i\in I}$ 是封闭道路 Γ_i 的有限集, 其中每条 Γ_i 分段可微. 如果下列条件被满足, 我们说 Γ 是紧集 K 的**有向边界**:

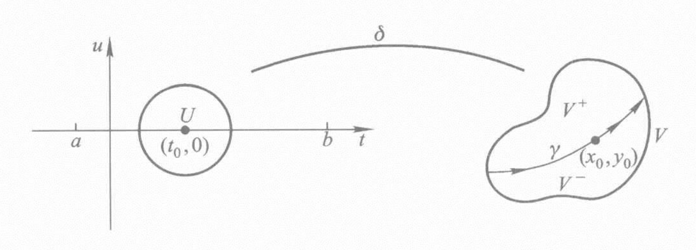


图 2

(BO 1) 在每个映射 $t \to \Gamma_i(t)$ 下, 除了定义线段的起点及终点的像外, 两个不同点的像是不同的. 而且各个 Γ_i 的像两两不相交, 它们的并集构成 K 的边界;

(BO 2) 如果 γ 是任一 Γ_i 的可微弧, 那么导数 $\gamma'(t)$ 处处 $\neq 0$. 而且如果 t_0 是 γ 的定义区间的内点, 并且如果上一引理中的开集 V 选择得充分小, 那么 V^-与 K 不相交, 而 V^+ 含在 K 的内部.

条件 (BO 2) 可以直观地表述为: 当按 t 增加的方向沿 γ 前进时, K 的内部的点总在左边, 而 K 的余集的点在右边.

例 取 K 为边与坐标轴平行的 (闭) 矩形, 那么如第 1 段末所确定的这矩形的边界, 正好是 K 的有向边界.

设已知格林 – 黎曼公式可应用于紧集 K 的有向边界 Γ. 准确地说, 如果 $\omega = P\,dx + Q\,dy$ 是一微分形式, 其系数在一个包含紧集 K 的开集内连续可微, 那么我们有等式

$$\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy \tag{9.1}$$

$\left(\text{如果 } \Gamma \text{ 由闭道路 } \Gamma_i \text{ 组成, 记号 } \int_\Gamma \text{ 表示 } \sum\limits_i \int_{\Gamma_i}\right)$. 特别, 如果形式 ω 在 D 内是闭的, 只要 Γ 是 D 内所含紧集的有向边界, 我们就有

$$\int_\Gamma \omega = 0. \tag{9.2}$$

§2. 全纯函数, 基本定理

1. 可微函数概念的回顾

设 D 是平面 $\mathbf{R}^2$ 上的开集, 设 $f(x,y)$ 是在 D 内确定的实值或复值函数. 设点 $(x_0,y_0) \in D$, 如果存在着实变数 h 及 k 的线性函数 $ah+bk$, 使得只要 h 及 k 充分小, 就有

$$f(x_0+h,\, y_0+k) - f(x_0,\, y_0) = ah + bk + \alpha\sqrt{h^2+k^2}, \tag{1.1}$$

我们说 f 在点 (x_0, y_0) 可微, 这里 α 是 h 及 k 的 (实或复值) 函数, 其绝对值当 $\sqrt{h^2+k^2}$ 趋近于 0 时也趋近于 0. 如果 f 在点 (x_0, y_0) 可微, (实或复) 常数 a 及 b 是唯一地确定的, 并且等于偏导数

$$a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \quad b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

我们记得, f 在点 (x_0, y_0) 有偏导数不足以保证 f 在这点可微, 但如果 f 在与 (x_0, y_0) 充分接近的任何点有偏导数, 并且如果这些偏导数在点 (x_0, y_0) 连续, 那么 f 在这点可微. 在开集 D 内有连续偏导数的函数称为在 D 内连续可微.

2. 全纯条件

设 D 是复平面 $\mathbf{C}$ 上的开集, 又设 f 是在 D 内有定义的复变量 $z = x + iy$ 的函数.

定义 设点 $z_0 \in D$, 如果

$$\lim_{\substack{u \to 0 \\ u \neq 0}} \frac{f(z_0+u) - f(z_0)}{u} \tag{2.1}$$

存在 (u 表示复变量), 那么我们说 $f(z)$ 在点 z_0 **全纯**. 这就是说, f 在 z_0 有关于复变量的导数. 如果 f 在开集 D 内每一点全纯, 我们说它在 D 内全纯.

条件 (2.1) 可写成

$$f(z_0+u) - f(z_0) = cu + \alpha(u)|u|, \tag{2.2}$$

其中 $\alpha(u)$ 当 u 趋近于 0 时趋近于 0, c 是导数 $f'(z_0)$. 由于 $z = x + iy$, 关系式 (2.2) 也可写成

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = c(h+ik) + \alpha(h,k)\sqrt{h^2+k^2}. \tag{2.3}$$

这表明, 作为两个实变量 x 及 y 的函数 f 可微, 并且

$$a = c, \quad b = ic,$$

这里 a 及 b 表示关系式 (1.1) 中的常数. 因此我们有 $\dfrac{\partial f}{\partial x} = c$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = ic$, 由此得

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0. \tag{2.4}$$

反之, 设 f 是实变量 x 及 y 的可微函数, 且满足 (2.4). 那么由关系式 (1.1) 可推出 (2.3), 其中 $c = a$, $ic = b$. 因此 f 在点 $z_0 = x_0 + iy_0$ 全纯. 这样证明了下列命题:

命题 2.1 *要使得 f 在一点全纯, 必须而且只需看作两个实变量 x 及 y 的函数 f 在这点可微, 而且 f 在这点的偏导数有关系式 (2.4).*

现解释 (2.4). 当写出 $f = P + iQ$ 时, 其中函数 P 及 Q 是实的, 我们得到柯西条件

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{2.5}$$

3. 变量 z 及 $\bar{z}$ 的引进

设 f 是实变量 x 及 y 的 (实值或复值) 可微函数.

考虑微分

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy. \tag{3.1}$$

特别的函数 $z = x + iy$ 及 $\bar{z} = x - iy$ 有微分

$$dz = dx + i\,dy, \quad d\bar{z} = dx - i\,dy, \tag{3.2}$$

因此反之有

$$dx = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z}),\ dy = \frac{1}{2i}(dz - d\bar{z}). \tag{3.3}$$

代入 (3.1), 得关系式

$$df = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)dz + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)d\bar{z}.$$

于是引进记号

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right). \tag{3.4}$$

应用这些记号, 我们得到关系式

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}. \tag{3.5}$$

这样, 表明 f 是复变量 z 的全纯函数的条件 (2.4) 可写成

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0. \tag{3.6}$$

换句话说, 为了使得 f 全纯, 必须而且只需在微分 df 的表示式 (3.5) 中, $d\bar{z}$ 的系数为零. 或即: df 与 dz 成比例, 比例系数正好是 $f'(z)$.

作为应用, 现证明下列结果: 设 f 是在连通开集 D 内全纯的函数. 如果 f 的实部是常数, 那么 f 也是常数.

事实上, 实部 $\mathrm{Re}(f)$ 就是 $\frac{1}{2}(f + \bar{f})$. 由假设, 在 D 内有 $d(f + \bar{f}) = 0$, 这式可写成

$$\frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}dz + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}d\bar{z} = 0.$$

但由于 f 全纯, 我们有 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$. 取共轭复数, 得 $\frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = 0$. 于是得

$$\frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}d\bar{z} = 0.$$

而表示式 $a\,dz + b\,d\bar{z}$ 只有在系数 a 及 b 为零时恒等于零, 由此得 $\dfrac{\partial f}{\partial z} = 0$, $\dfrac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} = 0$. 于是 $df = 0$, 从而 f 在 D 内是常数.

由此可推出: 如果 f 在连通开集 D 内全纯且 $\neq 0$, 并且如果 $\log|f|$ 或者 $\arg f$ 是常数, 那么 f 是常数.

事实上, 考虑函数

$$g(z) = \log f(z) = \log|f(z)| + i\arg f(z).$$

在点 z_0 的邻域内选取辐角的一个分支, g 是全纯的, 且其实部 (或虚部) 是常数. 因此 g 在 z_0 的邻域内是常数. 这样, $f = e^g$ 在 D 内局部为常数. 又因 D 是连通的, f 在 D 内是常数.

4. 柯西定理

定理 1 如果 $f(z)$ 在复平面的开集 D 内全纯, 那么微分形式 $f(z)dz$ 在 D 内是闭的.

由于本定理的重要性, 现给出两个证明:

第一个证明 这一证明中要作一补充假设: 设偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在 D 内连续. (实际上, 由下面第二个证明, 只要 f 在 D 内全纯, 这一假设自动成立.) 为了证明微分形式 $f(z)dz = f(z)dx + if(z)dy$ 是闭的, 由格林 – 黎曼公式 (§1, 公式 (3.1)), 只需证明

$$\frac{\partial f}{\partial y} = i\frac{\partial f}{\partial x}.$$

而这恰好是表明 f 为全纯的条件 (2.4). 证完.

第二个证明 与第一个证明不一样, 这一证明不需要任何补充假设, 但需要更细致的论证. 为了证明 $f(z)dz$ 是闭的, 必须证明: 沿着含在 D 内的任何矩形 R (其内部也含在 D 内) 的边界 γ, 积分 $\int_\gamma f(z)dz$ 为零. 为此, 先令

$$\int_\gamma f(z)dz = \alpha(R). \tag{4.1}$$

等分矩形 R 的每一边, 把 R 分成四个相等的矩形, 设 γ_i 是四个小矩形的 (有向) 边界 $(i = 1, 2, 3, 4)$. 容易证明 (参看图 3)

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{i=1}^{4}\int_{\gamma_i} f(z)dz = \sum_{i=1}^{4}\alpha(R_i).$$

四个小矩形中至少有一个满足 $|\alpha(R_i)| \geqslant \dfrac{1}{4}|\alpha(R)|$. 把这个小矩形叫做 $R^{(1)}$. 再把 $R^{(1)}$ 分成四个相等的矩形, 其中至少有一个, 设为 $R^{(2)}$, 满足条件

$$|\alpha(R^{(2)})| \geqslant \frac{1}{4^2}|\alpha(R)|.$$

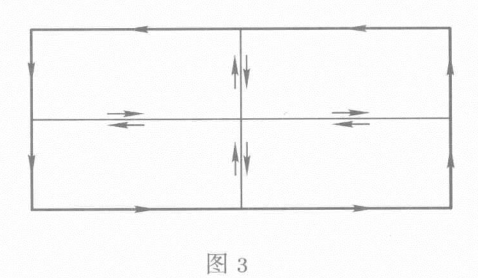


图 3

这种做法可无限继续下去. 于是得一矩形套, 其中第 k 个矩形的边长是矩形 R 的边长的 $\frac{1}{2^k}$, 其面积是矩形 R 的面积的 $\frac{1}{4^k}$. 如果 $\gamma(R^{(k)})$ 表示矩形 $R^{(k)}$ 的有向边界, 我们有

$$\left|\int_{\gamma(R^{(k)})} f(z)dz\right| \geqslant \frac{1}{4^k}|\alpha(R)|. \tag{4.2}$$

由柯西收敛准则, 存在着唯一一点 z_0 属于所有矩形 $R^{(k)}$. 显然, $z_0 \in D$. 因此 $f(z)$ 在 z_0 全纯, 从而

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \varepsilon(z)|z - z_0|,$$

其中

$$\lim_{z\to z_0} \varepsilon(z) = 0.$$

由此推出

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\gamma(R^{(k)})} f(z)dz = f(z_0)\int_{\gamma(R^{(k)})} dz + f'(z_0)\int_{\gamma(R^{(k)})}(z - z_0)dz \\ \qquad\qquad\displaystyle + \int_{\gamma(R^{(k)})} \varepsilon(z)|z - z_0|dz. \end{cases} \tag{4.3}$$

在 (4.3) 右边, 当 k 无限增大时, 前两积分为零, 至于第三个积分, 它与矩形 $R^{(k)}$ 的面积相比可略去不计, 从而它与 $\frac{1}{4^k}$ 相比可略去不计. 与 (4.2) 比较, 可见必须有 $\alpha(R) = 0$, 于是由 $\alpha(R)$ 的定义本身, 我们有 $\int_\gamma f(z)dz = 0$. 证完.

系 1 *在 D 内全纯的函数 $f(z)$ 在局部有全纯的原函数.*

这一论断表明: D 内任何点有一开邻域, 在其中 f 有全纯的原函数. 原函数的局部存在性可由闭形式的定义推出, 由于局部原函数有导数 f, 它是全纯的.

系 2 *如果 $f(z)$ 在 D 内全纯, 那么对于在 D 内并与 D 内一点同伦的任何闭道路 γ, 我们有 $\int_\gamma f(z)dz = 0$.*

这结果可由上列定理 1 及 §1 第 6 段中定理 2′ 推出.

推广 现把定理 1 成立的条件加以推广.

定理 1′ 设 $f(z)$ 是在开集 D 内连续的函数, 并且可能除去与实轴平行的直线 Δ 上的点外, $f(z)$ 在 D 内任何其他点全纯. 那么形式 $f(z)dz$ 是闭的. 特别, 如果可能除了若干孤立点外, f 在 D 内其他任何点全纯, 那么形式 $f(z)dz$ 是闭的.

证明 需要证明: 对于含在 D 内任何矩形的边界 γ, 积分 $\int_\gamma f(z)dz$ 为零. 如果矩形与直线 Δ 不相交, 这是明显的. 设矩形有一边在 Δ 上, 并设其四顶点为 $u, u+a, u+ib, u+a+ib$, 其中 u 及 $u+a$ 在 Δ 上, a 及 b 是实数, 并可设例如 $b>0$. 设 $R(\varepsilon)$ 是顶点为

$$u+i\varepsilon, \quad u+a+i\varepsilon, \quad u+ib, \quad u+a+ib$$

的矩形, 其中 ε 是很小的正数. 沿 $R(\varepsilon)$ 的边界所取的积分 $\int f(z)dz$ 为零, 而当 ε 趋近于 0 时, 这积分趋近于沿矩形 R 的边界 γ 所取的积分. 因此 $\int_\gamma f(z)dz=0$. 最后, 如果直线 Δ 与矩形 R 相交, 而 R 没有水平边在 Δ 上, 那么直线 Δ 把 R 分成两矩形 R' 及 R'', 并且由上述结果, 沿矩形 R' 及 R'' 中任一个所取积分 $\int f(z)dz$ 为零. 而这两积分的和等于沿 R 的边界所取的积分. 证完.

5. 柯西积分公式

定理 2 设 f 是在开集 D 内全纯的函数. 设 $a\in D$, 并且设 γ 是 D 内一条闭道路, 它不通过 a, 并与 D 内一点同伦. 那么我们有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)dz}{z-a}=I(\gamma,a)f(a), \tag{5.1}$$

其中 $I(\gamma,a)$ 表示闭道路 γ 关于点 a 的指标 (参看 §1 第 8 段).

证明 设 $g(z)$ 是在 D 内由下式确定的函数:

$$\begin{cases} g(z)=\dfrac{f(z)-f(a)}{z-a}, & \text{对于 } z\neq a; \\ g(z)=f'(a), & \text{对于 } z=a. \end{cases}$$

由导数的定义, 函数 g 连续. 除去点 a 外, 它在 D 内其他任何点全纯. 由定理 1′, 我们有

$$\int_\gamma \frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz=0.$$

而由指标的定义,

$$\int_\gamma \frac{f(a)}{z-a}dz=2\pi i\ I(\gamma,a)f(a).$$

关系式 (5.1) 得证.

例 设 f 在一个闭圆盘的邻域内全纯, 并设 γ 是按正向描出的边界. 我们有

$$\int_\gamma \frac{f(z)dz}{z-a} = \begin{cases} 2\pi i\, f(a), & \text{如果 } a \text{ 在圆盘内部;} \\ 0, & \text{如果 } a \text{ 在圆盘外部.} \end{cases}$$

6. 全纯函数的泰勒展式

定理 3 设 $f(z)$ 在开圆盘 $|z| < \rho$ 内全纯, 那么 f 在这圆盘内可展成幂级数.

这就是说, 存在着幂级数 $S(X) = \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n X^n$, 其收敛半径 $\geqslant \rho$, 并且对于 $|z| < \rho$, 其和 $S(z)$ 等于 $f(z)$.

证明 设 $r < \rho$. 我们将要找一幂级数, 它对于 $|z| \leqslant r$ 正规收敛于 $f(z)$. 由于函数在 0 的邻域内幂级数展式的唯一性, 上述幂级数应与 r 无关. 由此将可推出本定理.

选取 r_0, 使 $r < r_0 < \rho$. 取 γ 是心为 0, 半径为 r_0 并且按正向描出的圆, 应用定理 2 中的积分公式: 对于 $|z| \leqslant r$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(t)dt}{t-z}.$$

由于 $|z| < |t|$, 积分号下的函数 $\dfrac{1}{t-z}$ 可展开成级数. 准确地说, 我们有

$$\frac{1}{t-z} = \frac{1}{t}\frac{1}{1-z/t} = \frac{1}{t}\left(1 + \frac{z}{t} + \cdots + \frac{z^n}{t^n} + \cdots\right),$$

从而

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \sum_{n\geqslant 0} z^n \frac{f(t)}{t^{n+1}} dt.$$

对于 $|z| \leqslant r$ 及 $|t| = r_0$, 上列级数正规收敛. 因此可将它逐项积分, 并得到对于 $|z| \leqslant r$ 正规收敛的级数:

$$f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n,$$

其中系数 a_n 由下列积分给出:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=\gamma_0} \frac{f(t)dt}{t^{n+1}}. \tag{6.1}$$

定理 3 得证.

注释 定理 3 表明, 在开集 D 内全纯的任何函数在 D 内解析. 反之, 因为我们知道在 D 内解析的函数有导数, 所以任何在 D 内解析的函数全纯. 因此对于单复变函数, 全纯性与解析性等价. 如果对于全纯函数应用关于解析函数的已知结果, 可以看到全纯函数无限可导, 特别是连续可导. 还可看到, 全纯函数的导数全纯.

7. 莫勒拉定理

定理 4 (定理 1 的逆定理) 设 $f(z)$ 是在开集 D 内连续的函数. 如果微分形式 $f(z)dz$ 是闭的, 那么函数 $f(z)$ 在 D 内全纯.

事实上, f 局部有原函数 g. 这一原函数是全纯的, 并且 $f = g'$ 是全纯函数的导数, 因此根据以上所讲, 它本身是全纯的.

系 如果 $f(z)$ 在 D 内连续, 并且可能除去直线 Δ 上的点外, 它在 D 内所有其他点全纯, 那么 f 在 D 内任何点全纯.

事实上, 必要时作旋转, 可假定 Δ 平行于实轴. 由定理 $1'$, 形式 $f(z)dz$ 是闭的. 因此由定理 4, f 在 D 内任何点全纯.

我们看到, 定理 $1'$ 只是定理 1 的泛泛的推广. 但是由于其证明技巧, 还是需要把它推导出来.

8. 柯西公式的变形

定理 5 设 Γ 是含在开集 D 内的紧集 K 的有向边界, 又设 $f(z)$ 在 D 内全纯. 那么

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0.$$

如果还设 a 在 K 的内部, 我们有

$$\int_\Gamma \frac{f(z)dz}{z-a} = 2\pi i\, f(a). \tag{8.1}$$

证明 第一个结论可由 §1 中关系式 (9.1) 推出.

为了证明第二个结论, 考虑心为 a, 闭包在 K 内的小开圆盘 S. 紧集 $K-S$ 的有向边界由 Γ 及取逆向的 S 的圆边界 γ 组成. 我们说这个有向边界是 Γ 及取正向的 S 的圆边界 γ 之差. 对 $K-S$ 及在 $D-\{a\}$ 内全纯的函数 $\dfrac{f(z)}{z-a}$ 应用定理 5 的第一部分, 我们得到

$$\int_\Gamma \frac{f(z)dz}{z-a} = \int_\gamma \frac{f(z)dz}{z-a};$$

根据定理 2, 由此即得关系式 (8.1).

9. 施瓦茨对称原理

我们已经看到 (定理 4 的系), 如果 $f(z)$ 在开集 D 内连续, 并且除了可能在实轴上的点外, $f(z)$ 在 D 内其他任何点全纯, 那么 f 无例外地在 D 内任何点全纯.

现考虑关于实轴为对称的非空连通开集 D. 设 D' 是 D 与闭半平面 $y \geqslant 0$ 的交集, D'' 是 D 与闭半平面 $y \leqslant 0$ 的交集. 设已给函数 $f(z)$ 在 D' 连续, 在实轴上的点

取实值, 并且在 D' 中满足 $y>0$ 的点处全纯. 现证明在 D 内存在着开拓 f 的全纯函数. 由解析开拓原理 (参看第一章 §4 第 3 段), 这样的函数是唯一的.

考虑在 D'' 由下列关系式确定的函数 $g(z)$:

$$g(z)=\overline{f(\bar{z})}.$$

这函数在 D'' 连续, 并可立即证明: 它在 D'' 内不位于实轴上的任何点处全纯. 在 D' 等于 $f(z)$, 在 D'' 等于 $g(z)$ 的函数 $h(z)$ 在 D 内连续, 并且在 D 内不位于实轴上的任何点全纯. 因此它无例外地在 D 内任何点全纯.

我们注意, 在 D 内关于实轴为对称的两点, 函数 h 取复共轭值 (亦即关于实轴为对称的值). 这就是我们把上述作法命名为 "对称原理" 的理由.

习　题

1. a) 设 γ 是分段可微道路, $\overline{\gamma}$ 是它在映照 $z\to\bar{z}$ (关于实轴对称) 下的像. 证明: 如果 $f(z)$ 是在 γ 上的连续函数, 那么函数 $z\to\overline{f(\bar{z})}$ 在 $\overline{\gamma}$ 上连续, 并且我们有

$$\overline{\int_\gamma f(z)dz}=\int_{\overline{\gamma}}\overline{f(\bar{z})}dz.$$

b) 特别, 如果 γ 是按正向描出的单位圆, 我们有

$$\overline{\int_{|z|=1} f(z)dz}=-\int_{|z|=1}\overline{f(z)}\frac{dz}{z^2}$$

2. 设 γ 是连续道路 (不必分段可微). 证明: 如果 ω_1,ω_2,ω 是闭形式, $a\in\mathbf{C}$, 我们有

$$\int_\gamma(\omega_1+\omega_2)=\int_\gamma\omega_1+\int_\gamma\omega_2,\quad \int_\gamma a\omega=a\int_\gamma\omega.$$

(关于符号 $\int_\gamma\omega$ 的定义, 请参看 §1 第 5 段注意.)

3. 设 γ 是分段可微道路, 其像包含在开集 D 内. 又设 $\varphi(z)$ 是 D 内的全纯函数, 其值取在 (复变量 w 的平面上的) 开集 Δ 内. 证明 $\Gamma=\varphi\circ\gamma$ 是分段可微道路, 并且对于任何连续函数 $f(w)$, 我们有

$$\int_\Gamma f(w)dw=\int_\gamma f(\varphi(z))\varphi'(z)dz.$$

在 γ 不一定可微时, 上列公式仍然成立吗?

4. 设 γ 是 (可微) 道路: $t\to\gamma(t)=re^{it}$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, γ_n 是道路: $t\to\gamma_n(t)=(1-1/n)re^{it}$, t 在同一区间变动. 证明: 如果 $f(z)$ 在闭圆盘 $|z|\leqslant r$ 上连续, 我们有

$$\int_\gamma f(z)dz=\lim_{n\to\infty}\int_{\gamma_n}f(z)dz.$$

5. 证明: 如果 $f(z)$ 在闭圆盘 $|z|\leqslant r$ 连续, 在开圆盘 $|z|<r$ 全纯, 我们有: 对于任何 $|z|<r$,

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=r}\frac{f(t)}{t-z}dt,$$

这里积分是按正向取的.

6. 求一道路 $t \to \gamma(t)$, t 在 $[0,2\pi]$ 变动, 其像为平面 $\mathbf{R}^2$ 上的椭圆 $x^2/a^2+y^2/b^2=1(a,b>0)$. 用两种不同的方式计算积分 $\int_\gamma \dfrac{dz}{z}$, 并由此导出

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab}.$$

7. 设 $P_n(t)=t^n+a_{n-1}t^{n-1}+\cdots+a_0$ 是复系数 $n(\geqslant 1)$ 次多项式, 又设 γ_R 是圆 $|t|=R$ 在映照 $t\to z=P_n(t)$ 下的像. 证明: 如果 R 充分大, 那么 γ_R 不通过原点 $z=0$, 并且我们有 $I(\gamma_R,0)=n$. 由此断定 $P_n(t)=0$ 至少有一个根. (首先证明, 对于充分大的 R, 我们有: 在 $|t|\geqslant R$ 时, $|t^n|>|a_{n-1}t^{n-1}+\cdots+a_0|$. 然后应用 §1 命题 8.3, 证明 $I(\gamma_R,0)$ 等于圆 $|t|=R$ 在映照 $t\to t^n$ 下的像关于原点的指标.)

8. 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 是在连通开集 D 内的全纯函数. 如果我们有

$$au(x,y)+bv(x,y)=c,$$

其中 a,b 及 c 是不全为零的常数, 那么 $f(z)$ 在 D 内为常数.

9. 设 D 是平面上的凸开集, 又设 $f(z)$ 是在 D 内全纯的函数. 证明: 对于任一对点 $a,b\in D$, 可在连接 a 及 b 的线段上找到两点 c 及 d, 使得我们有

$$f(a)-f(b)=(a-b)(\mathrm{Re}(f'(c)+i\,\mathrm{Im}(f'(d))).$$

(考虑下式确定的单实变量 t 的函数:

$$F(t)=f(b+(a-b)t)/(a-b),$$

并且对 $F(t)$ 的实部及虚部应用有限增量定理.)

10. 设 D 是一连通开集, 它关于于实轴为对称, 并且它与实轴的交集 I 不是空集. 在 D 内全纯的任何函数 $f(z)$ 可以唯一的一种方式写成下列形式: 对于任何 $z\in D$,

$$f(z)=g(z)+ih(z),$$

其中 g 及 h 是在 D 内全纯的两函数, 并且在 I 上取实值. 证明这时我们有: 对于任何 $z\in D$,

$$\overline{g(\bar z)}=g(z) \quad \overline{h(\bar z)}=h(z),$$

并且

$$\overline{f(\bar z)}=g(z)-ih(z).$$

11. 设 f 及 g 是在平面上连通开集 D 内全纯的两函数, 它们在 D 内到处不等于零. 如果存在着 D 内的点列 (a_n), 使得

$$\lim a_n=a,\ a\in D;\quad 对于任何\ n,\ a_n\neq a,$$

并且使得我们有: 对于任何 n,

$$\frac{f'(a_n)}{f(a_n)}=\frac{g'(a_n)}{g(a_n)},$$

证明这时存在着常数 c, 使得在 D 内, $f(z)=cg(z)$.

12. 设 $\varphi(z)$ 是在紧集 K 的有向边界 Γ 上的连续函数. 设 D 是 Γ 在 $\mathbf{C}$ 中的余开集, 并且对于 $z \in D$, 令

$$f(z) = \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

(i) 如果对于 $a \in D$, 令 $\rho = \inf_{\zeta \in \Gamma} |\zeta - a|$, 那么证明: 对于 $\zeta \in \Gamma$ 及 $|z - a| \leqslant r$, 其中 $0 < r < \rho$, 分式 $\dfrac{1}{\zeta - z}$ 可按 $z - a$ 的乘幂展开成正规收敛幂级数. 由此推出: $f(z)$ 在每点 $a \in D$ 的邻域内解析. (参看 §2 定理 3 的证明.)

(ii) 证明: 对于任何整数 $n \geqslant 1$, $a \in D$, 我们有

$$f^{(n)}(a) = n! \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta.$$

(参看第三章 §1.)

13. 设 $f(z)$ 在 $|z| < \rho$ 内全纯, 证明: 如果 $0 < r < \rho$, 我们有:

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ 0 < |h| < \rho - r}} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z)$$

对于 $|z| \leqslant r$一致成立. $\Bigg($ 应用 12 可写出

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f'(z) = \frac{h}{2\pi i} \int_{|t|=r'} \frac{f(t)dt}{(t-z-h)(t-z)^2},$$

其中 $r' = (\rho + r)/2$, $|h| < (r' - r)/2 = (\rho - r)/4$ (譬如说), 由此推出: 如果 $M = \sup_{|t|=r'} |f(t)|$, 我们有

$$\left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f'(z) \right| \leqslant 4M \frac{\rho + r}{(\rho - r)^3} |h|. \Bigg)$$

14. 如果 $\mathbf{C} - \{0\}$ 中两条封闭曲线关于 0 有相同的指标, 那么它们在 $\mathbf{C} - \{0\}$ 中同伦.

第三章　泰勒展式及洛朗展式，奇点及留数

§1. 柯西不等式，刘维尔定理

1. 泰勒系数的积分表示式

我们已经看到 (第二章 §2 第 6 段定理 3), 如果 $f(z)$ 在心为原点的开圆盘 D 内全纯, $f(z)$ 是在 D 内收敛的一个幂级数 $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ 之和. 这幂级数的系数 a_n 由下列关系式给出:

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0).$$

换句话说, a_n 是 $f(z)$ 在原点的泰勒展式的系数. 这幂级数称为 $f(z)$ 的泰勒级数. 现设法用对函数 f 所取积分来表示系数 a_n.

令 $z = re^{i\theta}$, 其中 $0 \leqslant r < \rho$, ρ 表示圆盘 D 的半径. 我们有

$$f(re^{i\theta}) = \sum_{n\geqslant 0} a_n r^n e^{in\theta}. \tag{1.1}$$

如果取定 r, θ 为变数, 那么 $f(re^{i\theta})$ 是 θ 的周期函数, 上列关系式给出了这函数的傅里叶展式. 我们注意, 在这展式中, 只是出现了 $e^{in\theta}$, 其中 n 为整数 $\geqslant 0$. 然而我们知道, 对于周期为 2π 的连续函数, 其傅里叶展式的系数可以用关于函数的积分表示出来. 在现在的情形下, 当 r 固定, θ 变动时, 级数 (1.1) 正规收敛, 因此可将它逐项积分, 得到

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta} f(re^{i\theta}) d\theta = \sum_{p\geqslant 0} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a_p r^p e^{i(p-n)\theta} d\theta.$$

在上式右边，除了相应于 $p=n$ 的积分外，所有其他积分为零，于是得基本公式

$$a_n r^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta} f(re^{i\theta})d\theta, \tag{1.2}$$

上式也可从第二章 §2 中关系式 (6.1) 推出.

由上列表示式可求出系数 a_n 的模的上界：设当 θ 变动时，$M(r)$ 是 $|f(re^{i\theta})|$ 的上确界，亦即 $|f|$ 在半径为 r 的圆周上的值的上确界. (1.2) 右边的绝对值不超过 $M(r)$，于是由关系式 (1.2) 可推出基本不等式：

$$|a_n| \leqslant \frac{M(r)}{r^n}, \quad n \text{ 为整数} \geqslant 0. \tag{1.3}$$

这些不等式称为**柯西不等式.**

2. 刘维尔定理

定理 *在平面上全纯并且有界的函数 $f(z)$ 是常数.*

证明 对于任何整数 $n \geqslant 1$，应用不等式 (1.3). 由假设，数量 $M(r)$ 不超过与 r 无关的数 M. 因此无论 r 怎样大，我们有

$$|a_n| \leqslant \frac{M}{r^n}.$$

因为当 r 趋近于无穷大时，上列不等式右边趋近于 $0\,(n \geqslant 1)$，所以可看出，对于 $n \geqslant 1, a_n = 0$，这样，$f(z) = a_0$ 是常数.

应用：达朗贝尔定理 现证明：不恒等于常数的任何复系数多项式至少有一复根.

设 $P(z)$ 是一个这样的多项式. 用反证法，假定对任何复数 $z, P(z) \neq 0$. 那么函数 $\dfrac{1}{P(z)}$ 在整个平面全纯. 它有界，事实上，当 $|z|$ 趋向无穷大时，

$$\begin{aligned} P(z) &= a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0 \\ &= z^n\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}\right), \quad a_n \neq 0, \end{aligned}$$

趋向于无穷大. 因此存在着一个紧圆盘，在它以外 $\left|\dfrac{1}{P(z)}\right|$ 有界. 另一方面，$\left|\dfrac{1}{P(z)}\right|$ 既然是连续函数，从而在这紧圆盘上也有界. 这样，$\dfrac{1}{P(z)}$ 在整个平面上有界. 于是由刘维尔定理，它是常数. 因而 $P(z)$ 是常数，与假设相矛盾.

§2. 平均性质与最大模原理

1. 平均性质

应用 §1 中关系式 (1.2) 于 $n=0$ 这一特殊情形. 我们得到

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})d\theta, \tag{1.1}$$

或

$$f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})d\theta. \tag{1.2}$$

这关系式表明: f 在点 0 的值等于 f 在心为 0, 半径为 r 的圆上的平均值. 更一般地, 由此可得: 设 f 在开集 D 内全纯, 如果 S 是含在 D 内的闭圆盘, 那么 f 在圆盘 S 的中心的值, 等于 f 在 S 的圆周边界上的平均值 (这平均值是关于圆弧取的).

设 f 是在开集 D 内确定的实值或复值连续函数. 如果对于含在 D 内的任何紧圆盘 S, f 在 S 的心处的值等于 f 在 S 的圆周边界上的平均值, 我们说 f 具有**平均性质**. 以后要看到, 具有平均性质的函数就是**调和函数**. 从现在开始, 我们可以说任何全纯函数具有平均性质. 显然, 如果复值函数具有平均性质, 其实部及虚部也具有平均性质. 因此全纯函数的实部及虚部具有平均性质.

2. 最大模原理

这原理可应用于具有平均性质的任何 (实值或复值) 函数 (我们以后要看到, 这就是说, 可应用于调和函数).

定理 1 (最大模原理) *设 f 是平面 $\mathbf{C}$ 上开集 D 内的 (复值) 连续函数. 如果 f 具有平均性质, 并且如果 $|f|$ 在一点 $a \in D$ 有相对极大值 (亦即如果对于与 a 充分接近的任何 $z, |f(z)| \leqslant |f(a)|$), 那么 f 在 a 的一个邻域内为常数.*

证明 如果 $f(a)=0$, 定理是明显的. 因此设 $f(a)\neq 0$, 必要时用一适当的复常数乘 f, 问题可化为 $f(a)$ 是实数 >0 情形. 以下我们假设这一情形成立.

设对于充分小的 $r \geqslant 0$,

$$M(r) = \sup_\theta |f(a+re^{i\theta})|.$$

由假设, 对于充分小的 $r\geqslant 0$, 我们有 $M(r)\leqslant f(a)$. 而且由平均性质, 我们有

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta})d\theta, \tag{2.1}$$

由此得 $f(a)\leqslant M(r)$, 从而 $f(a)=M(r)$. 于是对于充分小的 $|z-a|=r$, 函数

$$g(z) = \mathrm{Re}(f(a)-f(z))$$

是 $\geqslant 0$ 的. 而且 $g(z)=0$ 必须而且只需 $f(z)=f(a)$. 由 (2.1), $g(z)$ 在圆

$$|z-a|=r$$

上的平均值是零. 由于 g 连续且 $\geqslant 0$, 这就要求 g 在这圆上恒等于零. 因此当 $|z-a|=r$ 充分小时, 我们有 $f(z)=f(a)$. 证完.

系 设 D 是平面 $\mathbf{C}$ 上的连通有界开集. 设 f 是在闭包 $\overline{D}$ 上确定且连续的 (复值) 函数, 并且在 D 内具有平均性质. 设当 z 描出 D 的边界时, M 是 $|f(z)|$ 的上确界. 那么

(i) $|f(z)| \leqslant M$, 对于$z \in D$;

(ii) 如果在一点 $a \in D$, $|f(a)|=M$, 那么 f 是常数.

证明 设 M' 是 $|f(z)|$ 对于 $z \in \overline{D}$ 的上确界 (由于 $|f(z)|$ 连续), 这一上确界在紧集 $\overline{D}$ 中至少一点 a 达到. 如果 $a \in D$, 由定理 1, f 在 a 的邻域内是常数. 定理 1 表明, D 中 f 取值 $f(a)$ 的点所成的集是开集, 又因它显然是非空闭集 (由于 D 是连通的), 这集就是整个集 D. 既然 f 在 $\overline{D}$ 上连续, 对于 $z \in \overline{D}$, 我们也有 $f(z)=f(a)$. 这样就证明了 $M'=M$, 从而证明了结论 (i) 及 (ii). 还要考察在任何点 $a \in D, |f(a)| \neq M'$ 情形. 但这时 $M=M'$ (这证明了 (i)), 而且既然在 D 内任何点 a, 没有 $|f(a)|=M$, (ii) 显然成立.

注意 最大模原理特别可应用到下列情形: 如果函数 f 在闭圆盘上连续, 并且在圆盘内部全纯, 那么在圆盘内部, $|f|$ 不超过 $|f|$ 在圆盘边界上的上确界. 特别, 在柯西不等式 (1.3) 中, $M(r)$ 不但是 $|f(z)|$ 对于 $|z|=r$ 的上确界, 也是它对于 $|z| \leqslant r$ 的上确界.

§3. 施瓦茨引理

定理 (施瓦茨引理) 设 $f(z)$ 是在圆盘 $|z|<1$ 内全纯的函数. 设

$$f(0)=0; \quad |f(z)|<1, \quad \text{对于 } |z|<1.$$

那么: 1° 对于 $|z|<1$, 我们有 $|f(z)| \leqslant |z|$;

2° 如果对于一点 $z_0 \neq 0$, 我们有等式 $|f(z_0)|=|z_0|$, 那么就有恒等式

$$f(z)=\lambda z, \quad |\lambda|=1.$$

证明 在泰勒展式 $f(z)=\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$ 中, 由于 $f(0)=0$, 系数 a_0 为零. 于是对于 $|z|<1, f(z)/z$ 全纯. 既然由假设, $|f(z)|<1$, 我们有: 对于 $|z|=r$,

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right|<\frac{1}{r}.$$

由最大模原理, 这不等式对 $|z| \leqslant r$ 也成立. 如果在圆盘 $|z| < 1$ 内取定 z, 那么无论 r 是 $\geqslant |z|$ 及 < 1 的任何数, 我们有 $|f(z)| < \frac{|z|}{r}$. 因此取极限即得 $|f(z)| \leqslant |z|$, 定理中结论 1° 得证. 如果对于一点 $z_0 \neq 0$, 我们有 $|f(z_0)| = |z_0|$, 那么全纯函数 $f(z)/z$ 在圆盘 $|z| < 1$ 的一内点达到它的最大模. 因此由最大模原理, 这函数是常数, 从而有恒等式 $f(z)/z = \lambda, |\lambda| = 1$. 证完.

§4. 洛朗展式

1. 洛朗级数

在这里考虑形式幂级数 $\sum\limits_n a_n X^n$, 其中 (形式) 和是对所有整数 n 即正负整数或 0 作出的. 这样的级数与两个 (通常意义下的) 形式级数 $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n X^n$ 及 $\sum\limits_{n<0} a_n X^{-n}$ 相对应. 设 ρ_1 及 $1/\rho_2$ 是这两级数的收敛半径.

考虑收敛级数:

$$f_1(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n, \quad \text{对于 } |z| < \rho_1, \tag{1.1}$$

$$f_2(z) = \sum_{n<0} a_n z^n, \quad \text{对于 } |z| < \rho_2. \tag{1.2}$$

现证 $f_2(z)$ 是 z 的全纯函数. 令 $z = 1/u$, 函数

$$g(u) = \sum_{n>0} a_{-n} u^n$$

对于 $|u| < 1/\rho_2$ 全纯, 并且它的导数由下式给出:

$$g'(u) = \sum_{n>0} n a_{-n} u^{n-1}.$$

由求复合函数的导数的定理, $f_2(z)$ 有导数, 并且它的导数等于

$$f_2'(z) = -\frac{1}{z^2} g'(1/z) = \sum_{n<0} n a_n z^{n-1}.$$

这样, 对于 $|z| > \rho_2$, 级数 (1.2) 可逐项求导. 此后假定 $\rho_2 < \rho_1$. 于是级数

$$\sum_{-\infty<n<+\infty} a_n z^n \tag{1.3}$$

的和 $f(z)$ 在圆环 $\rho_2 < |z| < \rho_1$ 内全纯, 并且它的导数 $f'(z)$ 是逐项求导所得级数 $\sum n a_n z^{n-1}$ 的和.

级数 $\sum a_n z^n$ 称为环 $\rho_2 < |z| < \rho_1$ 内的**洛朗级数.**

以上我们没有除掉 $\rho_2 = 0$ 及 $\rho_1 = +\infty$ 情况. 无论 r_1 及 r_2 是满足

$$\rho_2 < r_2 < r_1 < \rho_1$$

的什么数, 在圆环 $r_2 \leqslant |z| \leqslant r_1$ 上, 级数 (1.3) 的收敛性是正规的.

2. 环内全纯函数的洛朗级数展式

定义 设函数 $f(z)$ 在环

$$\rho_2 < |z| < \rho_1$$

内确定. 如果存在着一个洛朗级数 $\sum\limits_n a_n z^n$ 在这环内收敛, 且在环内任一点, 其和等于 $f(z)$, 那么我们说 $f(z)$ 在这环内可展开成洛朗级数.

由第 1 段, $f(z)$ 在环内全纯, 并且在任何闭环 $r_2 \leqslant |z| \leqslant r_1$ 上, 收敛是正规的, 在这里

$$\rho_2 < r_2 < r_1 < \rho_1.$$

而且我们还要证明, 如果洛朗级数存在, 它就是唯一的.

事实上, 令 $z = re^{i\theta}(\rho_2 < r < \rho_1)$, 逐项求正规收敛的展开式

$$f(re^{i\theta}) = \sum_{-\infty<n<+\infty} a_n r^n e^{in\theta}$$

关于 θ 的积分, 我们得到恰好与 §1 (第 1 段) 中一样的积分公式

$$a_n r^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta} f(re^{i\theta})d\theta, \quad n \text{ 为整数} \geqslant 0 \text{ 或 } < 0. \tag{2.1}$$

我们看到, 已给函数 f, 如果它的洛朗展式存在, 这种展式的系数 a_n 可由关系式 (2.1) 唯一确定.

定理 在环 $\rho_2 < |z| < \rho_1$ 内全纯的任何函数 $f(z)$ 可在这环内展开成洛朗级数.

证明 给出两数 r_1 及 r_2 满足

$$\rho_2 < r_2 < r_1 < \rho_1.$$

现证明存在着在圆环 $r_2 \leqslant |z| \leqslant r_1$ 正规收敛的一个洛朗级数, 其和在这圆环等于 $f(z)$. 根据从积分公式 (2.1) 推出的洛朗展式的唯一性, 这样得到的洛朗级数与 r_1 及 r_2 的选取无关. 因此这一洛朗级数在整个圆环 $\rho_2 < |z| < \rho_1$ 内收敛于 $f(z)$, 于是定理就可得证.

选取数 r_1 及 r_2 后, 设 r_1' 及 r_2' 是满足 $\rho_2 < r_2' < r_2 < r_1 < r_1' < \rho_1$ 的两数. 考虑紧环

$$r_2' \leqslant |z| \leqslant r_1',$$

其有向边界是圆 γ_1 及圆 γ_2 的差, 这里 γ_1 及 γ_2 都是心在原点并且按正向描出的圆, 其半径分别是 r_1' 及 r_2'. 根据柯西积分公式 (第二章 §2 定理 5), 我们有: 对于 $r_2 \leqslant |z| \leqslant r_1$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(t)dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(t)dt}{t-z}. \tag{2.2}$$

考虑 (2.2) 中第一个积分, 我们有 $|t| = r_1'$ 及 $|z| \leqslant r_1 < r_1'$. 因此可写出级数展式

$$\frac{1}{t-z} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{z^n}{t^{n+1}}.$$

当 t 描出心为 0, 半径为 r_1' 的圆时, 上列级数正规收敛. 在上述积分中把 $\frac{1}{t-z}$ 用这级数来代替, 根据正规收敛性, 可进行逐项积分, 由此得

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(t)dt}{t-z} = \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n, \tag{2.3}$$

其中已令

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(t)dt}{t^{n+1}}, \quad n \geqslant 0. \tag{2.4}$$

现考虑 (2.2) 中第二个积分, 我们有

$$|t| = r_2' \quad \text{及} \quad |z| \geqslant r_2 > r_2',$$

由此得

$$\frac{1}{t-z} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1-t/z} = -\sum_{n<0} \frac{z^n}{t^{n+1}}.$$

在第二个积分中把 $\frac{1}{t-z}$ 用这级数来代替, 既然这级数正规收敛, 可以进行逐项积分, 由此得

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(t)dt}{t-z} = \sum_{n<0} a_n z^n, \tag{2.5}$$

其中已令

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(t)dt}{t^{n+1}}, \quad n < 0. \tag{2.6}$$

最后, 关系式 (2.2) 表明: 对于 $r_2 \leqslant |z| \leqslant r_1$, 我们有

$$f(z) = \sum_{-\infty < n < +\infty} a_n z^n,$$

这里收敛是正规的. 定理得证.

3. 环内全纯函数的分解

命题 3.1 已给在环 $\rho_2 < |z| < \rho_1$ 内全纯的函数 $f(z)$, 存在着在圆盘 $|z| < \rho_1$ 内全纯的函数 $f_1(z)$ 及在 $|z| > \rho_2$ 内全纯的函数 $f_2(z)$, 使得

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z). \tag{3.1}$$

如果要求所取函数 f_2 当 $|z|$ 趋向于 ∞ 时趋近于 0, 这种分解是唯一的.

事实上, 设 $f(z)=\sum\limits_{-\infty<n<+\infty} a_n z^n$ 是 f 的洛朗级数. 令

$$f_1(z)=\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n, \quad f_2(z)=\sum_{n<0} a_n z^n, \tag{3.2}$$

关系式 (3.1) 显然成立, 并且 $|f_2(z)|$ 当 $|z|$ 趋向于 ∞ 时趋近于 0. 假定我们有另一分解

$$f(z)=g_1(z)+g_2(z),$$

要证明 $f_1=g_1, f_2=g_2$. 设 h 是一全纯函数, 它在 $|z|<\rho_1$ 时等于 f_1-g_1, 在 $|z|>\rho_2$ 时等于 g_2-f_2. 函数 h 在全平面全纯, 并且当 $|z|$ 趋向 ∞ 时趋近于 0. 由最大模原理 (§2 第 2 段), 函数 h 恒等于零. 证完.

4. 柯西不等式, 对孤立奇点研究的应用

考虑积分公式 (2.1). 如果 $M(r)$ 表示 $|f(z)|$ 对于 $|z|=r$ 的上确界, 那么 (2.1) 的右边的模不超过 $M(r)$, 由此得柯西不等式

$$|a_n|\leqslant \frac{M(r)}{r^n}, \quad n \text{ 为整数 } \geqslant 0 \text{ 或 } <0. \tag{4.1}$$

考虑在去心圆盘 $0<|z|<\rho$ 内全纯的函数 $f(z)$. 我们要问这函数是否可开拓为在整个圆盘内 (包括圆心) 的全纯函数. 如果这种开拓存在, 它显然是唯一的 (根据解析开拓原理, 或者更简单地根据连续性).

命题 4.1 *为了使得这种开拓是可能的, 必须而且只需函数 $f(z)$ 在 0 的邻域内有界.*

这条件显然是必要的. 现证明它是充分的. 在去心圆盘 $0<|z|<\rho$ 内, 函数 f 可展开成洛朗级数 $\sum\limits_{-\infty<n<+\infty} a_n z^n$. 由假设, 存在一个数 $M>0$, 对于充分小的任何正数 r, 当 $|z|=r$ 时, $|f(z)|$ 不超过 M. 由柯西不等式 (4.1), 我们有: 无论正数 r 怎样小,

$$|a_n|\leqslant \frac{M}{r^n}.$$

由此可推出, 对于 $n<0, a_n=0$. 因此 f 的洛朗展式化为泰勒级数, 而且正是它确定了 $f(z)$ 的所求开拓.

定义 设 $f(z)$ 是在去心圆盘 $0<|z|<\rho$ 内的全纯函数. 如果函数 f 不能开拓成在整个圆盘 $|z|<\rho$ 内的全纯函数, 我们说原点 0 是 f 的一个**孤立奇点**.

使得 0 是孤立奇点的一个必要与充分条件是: 对于 $n<0$, 洛朗展式的系数 a_n 不全是零. 我们看到有两种可能情形:

第一种情形: 只有有限个整数 $n<0$, 使得 $a_n\neq 0$. 在这种情形下, 存在着一个正整数 n, 使得 $z^n f(z)$ 是在原点全纯的函数 $g(z)$. 因此 $f(z)=\dfrac{g(z)}{z^n}$ 在原点的邻域内亚纯.

第二种情形: 有无穷多个整数 $n<0$, 使得 $a_n \neq 0$. 在这种情形下, $f(z)$ 不能开拓成在原点的邻域内的亚纯函数.

定义 在第一种情形下, 我们说点 0 是函数 f 的一个**极点**; 在第二种情形下, 我们说 0 是函数 f 的**本性奇点.**

定理 (魏尔斯特拉斯) 设 $f(z)$ 是在去心圆盘 $0<|z|<\rho$ 内全纯的函数. 如果 0 是 $f(z)$ 的孤立本性奇点, 那么对于任何 $\varepsilon>0$, 去心圆盘 $0<|z|<\varepsilon$ 在映射 f 下的像在平面 $\mathbf{C}$ 上稠密.

证明 应用反证法, 假定去心圆盘 $0<|z|<\varepsilon$ 在映射 f 的像的外部, 存在一个心为 a, 半径为 $r>0$ 的圆盘. 因此对于 $0<|z|<\varepsilon$, 应有

$$|f(z)-a| \geqslant r. \tag{4.2}$$

于是函数 $g(z)=\dfrac{1}{f(z)-a}$ 应在去心圆盘 $0<|z|<\varepsilon$ 内全纯并且有界. 由命题 4.1, 这函数应可开拓成在圆盘 $|z|<\varepsilon$ 内的全纯函数, 记作 $g(z)$. 于是 $\dfrac{1}{g(z)}$ 在圆盘 $|z|<\varepsilon$ 内亚纯, 而 $f(z)=a+\dfrac{1}{g(z)}$ 也应在这圆盘内亚纯, 与 0 为 $f(z)$ 的本性奇点这一假设相矛盾.

注意 把 z 换成 $z-z_0$, 就可把 z_0 为本性奇点情形化为 $z_0=0$ 情形.

现叙述比魏尔斯特拉斯定理准确得多的下列定理, 但不作证明.

皮卡定理 如果 0 是全纯函数 $f(z)$ 的孤立本性奇点, 那么任何圆环 $0<|z|<\varepsilon$ 在映照 f 下的像或者是整个平面 $\mathbf{C}$, 或者是平面 $\mathbf{C}$ 去掉唯一一点.

例 函数 $e^{\frac{1}{z}}=\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{1}{n!}\dfrac{1}{z^n}$ 在除去一点的平面 $z\neq 0$ 全纯. 由于对任何 $n\geqslant 0$, $\dfrac{1}{z^n}$ 的系数 $\neq 0$, 这函数以原点作为孤立本性奇点. 它不取值 0. 作为练习, 请证明在任何去心圆盘 $0<|z|<\varepsilon$ 内, 这函数取任何值 $\neq 0$.

§5. 无穷远点的引入, 留数定理

1. 黎曼球面

在空间 $\mathbf{R^3}$ 中, 把一点的坐标记作 x,y,u, 并且考虑单位球面 S_2:

$$x^2+y^2+u^2=1.$$

在 S_2 中采用由空间 $\mathbf{R^3}$ 的拓扑所导出的拓扑, 由于 S_2 是 $\mathbf{R^3}$ 中的闭有界子集, 球面 S_2 是紧空间. 设 P 及 P' 是 S_2 上两点, 其坐标分别是 $(0,0,1)$ 及 $(0,0,-1)$. 考虑

极为 P 的球极平面射影. 它把 S_2 上异于 P 的任何点 M 映射为平面 $u=0$ 上与 P 及 M 共线的点, 其复坐标 z 由下列公式给出:

$$z=\frac{x+iy}{1-u}, \tag{1.1}$$

这里 x,y,u 是点 M 的坐标.

同样, 考虑极为 P' 的球极平面射影. 这一射影把 $M(x,y,u)$ 映射成平面 $u=0$ 上一点, 取这点的虚共轭点, 其复坐标 z' 由下列公式给出:

$$z'=\frac{x-iy}{1+u}. \tag{1.2}$$

我们注意, 对于异于 P 及 P' 的任何点 $M(x,y,u)$, 相应的复数 z 及 z' 之间有下列关系式:

$$zz'=1. \tag{1.3}$$

映射 $(x,y,u)\to z$ 是从 S_2-P 到 $\mathbf{C}$ 上的同胚, 我们说, 有 S_2-P 在复平面 $\mathbf{C}$ 上的一个图形. 同样, 映射 $(x,y,u)\to z'$ 是 S_2-P' 在复平面 $\mathbf{C}$ 上的一个图形. 具有这两种图形的球面 S_2 称为黎曼球面.

设 D 是 S_2 上的开集. 设函数 f 在 D 内确定, 如果在异于 P 的任何点 $M(\in D)$ 的邻域内, f 可表示为 z 的全纯函数, 而且如果在异于 P' 的任何点 $M(\in D)$ 的邻域内, 它可表示为 z' 的全纯函数, 那么我们说函数 f 在 D 内全纯. 注意: 由于关系式 (1.3), 在异于 P 及 P' 的点的邻域内, z 的任何全纯函数是 z' 的全纯函数, 反过来也是这样. 由关系式 (1.1), 总把复平面 $\mathbf{C}$ 与球面 S_2 去掉点 P 看作等同. 我们看到, 对 $\mathbf{C}$ 加上 "无穷远点", 就得到 S_2. 为了研究在无穷远点 P 的邻域内的函数, 我们应用复变量 $z'=1/z, z'$ 在点 P 为零. 在 $\mathbf{C}$ 上, 开集 $|z|>r$ 形成无穷远点的基本邻域组. 设函数 $f(z)$ 在这样的一个开域内确定, 如果通过变量代换 $z=1/z'$, 对于 $|z'|<1/r, f(z)$ 表示为 z' 的全纯函数, 那么 $f(z)$ "在无穷远全纯".

同样, 设有函数 $f(z)$, 如果在 $z'=0$ 的邻域内, $f(z)$ 可表示成为 z' 的亚纯函数, 那么 $f(z)$ "在无穷远亚纯". 最后, 设 $f(z)$ 在 $|z|>r$ 全纯, 如果函数 $f(1/z')$ 以原点 $z'=0$ 为孤立本性奇点, 那么 $f(z)$ 以无穷远点为孤立本性奇点. 如果

$$f(z)=\sum_n a_n z^n$$

是 $f(z)$ 对于 $|z|>r$ 的洛朗展式, 那么无穷远点是 f 的极点的必要与充分条件是: 对于所有整数 $n\geqslant 0$, 除去其中有限个外, $a_n=0$; 无穷远点是 f 的本性奇点的必要与充分条件是: 存在无穷多个整数 $n\geqslant 0$, 使得 $a_n\neq 0$.

在球面 S_2 上, 我们有可微道路, 闭道路, 以及紧集的有向边界等概念.

2. 留数定理

首先考虑在心为原点的圆环 $\rho_2 < |z| < \rho_1$ 内全纯的函数 $f(z)$.

命题 2.1 如果 γ 是含在这样的圆环内的一条闭道路, 我们有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz = I(\gamma,0)a_{-1} \tag{2.1}$$

其中 $I(\gamma,0)$ 表示道路 γ 关于原点 0 的指标, a_{-1} 是 f 的洛朗展式中 $1/z$ 的系数.

证明 我们有

$$f(z) = a_{-1}/z + g(z),$$

其中

$$g(z) = \sum_{n\neq -1} a_n z^n$$

在圆环内全纯, 并且有原函数

$$\sum_{n\neq -1} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} (\text{参看 §4 第 1 段}).$$

因此有关系式

$$\int_\gamma f(z)dz = a_{-1}\int_\gamma dz/z + \int_\gamma g(z)dz. \tag{2.2}$$

可是由于 g 有原函数,

$$\int_\gamma g(z)dz = 0.$$

由指标的定义,

$$\int_\gamma dz/z = 2\pi i I(\gamma,0).$$

这两关系式与 (2.2) 相结合, 就得到 (2.1).

当函数 f 以原点 0 作为孤立奇点 (极点或本性奇点) 时, 特别可应用公式 (2.1). 在这种情形下, γ 表示 0 的邻域内不通过 0 的一条闭道路. 在 f 的洛朗展式中, 系数 a_{-1} 称为函数 f 在奇点 0 的**留数.** 特别, 如果 γ 表示心为 0, 半径很小并且按正向描出的圆, 我们有

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i a_{-1}. \tag{2.3}$$

如果孤立奇点是复平面 $\mathbf{C}$ 上有限远处任一点, 在这点的留数的定义可同样作出.

在无穷远点的留数的定义中, 需要一种特殊约定: 设 $f(z)$ 是对于 $|z| > r$ 全纯的函数. 令 $z = 1/z'$, 我们有

$$f(z)dz = -\frac{1}{z'^2} f\left(\frac{1}{z'}\right) dz'.$$

作为定义, f 在无穷远点的留数等于函数 $-\frac{1}{z'^2}f\left(\frac{1}{z'}\right)$ 在点 $z'=0$ 的留数. 因此, 如果 $\sum_n a_n z^n$ 是 $f(z)$ 在无穷远点的邻域内的洛朗展式, 那么 $f(z)$ 在无穷远点的留数是 $-a_{-1}$.

留数定理 设 D 是黎曼球面 S_2 上的开集, 并且设 f 是在 D 内可能除去若干孤立点外全纯的函数, 而这些孤立点是 f 的奇点. 设 Γ 是含在 D 内的紧集 A 的有向边界, 并且假定 Γ 不含 f 的任一奇点或无穷远点. 那么含在 A 内的奇点 z_k 的个数是有限的, 并且我们有关系式:

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i\left(\sum_k \mathrm{Res}(f, z_k)\right), \tag{2.4}$$

其中 $\mathrm{Res}(f, z_k)$ 表示函数 f 在点 z_k 的留数; 求和是对所有奇点 $z_k \in A$ 作出的, 其中可能包括无穷远点.

证明 按照无穷远点是否属于 A, 分成两种情形.

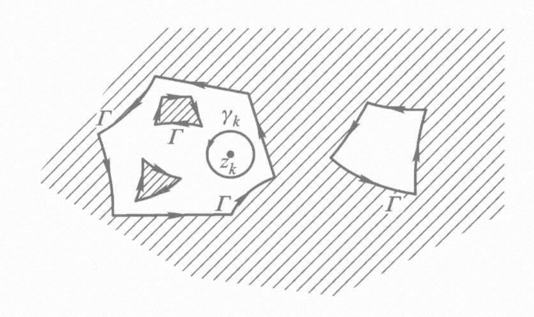


图 4
请注意: 阴影部分表示紧集 A 的余集.

第一种情形 无穷远点不属于 A, 因而 A 是平面 $\mathbf{C}$ 上的 (有界) 紧集 (参看图 4). 每个奇点 z_k 是 A 内部一个闭圆盘 δ_k 的心, 并且可选取这些圆盘的半径充分小, 使得这些圆盘彼此不相交. 设 γ_k 是圆盘 δ_k 按正向描出的边界.

设 A' 是从 A 中除去上述各圆盘的内部而得的紧集, A' 的有向边界是 (A 的有向边界) Γ 与圆 γ_k 的差. 既然 f 在 A' 的邻域内全纯, 我们有 (参看第二章 §2 第 8 段定理 5)

$$\int_\Gamma f(z)dz = \sum_k \int_{\gamma_k} f(z)dz. \tag{2.5}$$

另一方面, 由 (2.3),

$$\int_{\gamma_k} f(z)dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f, z_k).$$

把上式代入 (2.5), 就得到求证的关系式 (2.4).

第二种情形 无穷远点属于 A. 设 $|z| \geqslant r$ 是无穷远点的邻域，它与 Γ 不相交，并且 $f(z)$ 在这邻域 (可能除去无穷远点) 中全纯. 设 A'' 是 A 中除去开集 $|z| > r$ 而得的紧集 (参看图 5). A'' 的有向边界是 A 的有向边界 Γ 及按正向描出的圆 $|z| = r$ 的和. 对 A'' 应用第一种情形下所证明的结果, 我们得到

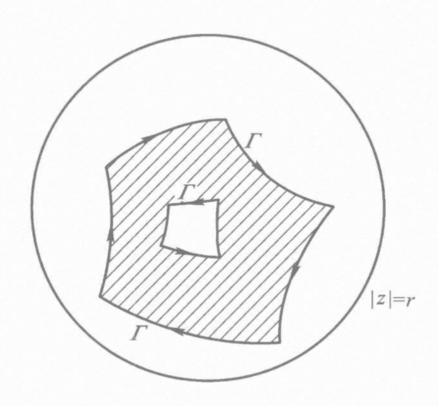


图 5
请注意: 阴影部分表示 A 的余集.

$$\int_{\Gamma} f(z)dz + \int_{|z|=r} f(z)dz = 2\pi i \sum_k \mathrm{Res}(f, z_k), \tag{2.6}$$

上式右边中的和式是对含在 A 内的所有奇异点 z_k (无穷远点除外) 作出的. 另一方面, 由在无穷远点的留数的定义, 我们有

$$\int_{|z|=r} f(z)dz = -2\pi i\ \mathrm{Res}(f, \infty).$$

代入 (2.6), 就得到:

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \left(\mathrm{Res}(f, \infty) + \sum_k \mathrm{Res}(f, z_k) \right).$$

在无穷远点是 z_k 中一点情况下, 这正是要证明的关系式 (2.4).

注意 特别, 考虑紧集是整个球面 S_2 情形. 这时边界是空集, 关系式 (2.4) 化为

$$\sum_k \mathrm{Res}(f, z_k) = 0. \tag{2.7}$$

例如, 有理分式的留数 (包括在无穷远点的留数) 的和为零.

3. 留数的实际计算

单极点情形 设 z_0 是 f 的单极点, 于是我们有

$$f(z) = \frac{1}{z - z_0} g(z),$$

其中 $g(z)$ 在 z_0 的邻域内全纯, 并且 $g(z_0) \neq 0$. 设

$$g(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n (z - z_0)^n$$

是 $g(z)$ 在 z_0 的邻域内的泰勒展式, 我们看到, 在 $f(z)$ 的洛朗展式中, $\dfrac{1}{z - z_0}$ 的系数等于 $g(z_0)$. 因此我们有

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \neq z_0}} (z - z_0) f(z). \tag{3.1}$$

如果 f 由商式 P/Q 的形式给出, 其中 P 及 Q 在 z_0 的邻域内全纯, 并且 z_0 是 Q 的单零点, $P(z_0) \neq 0$, 那么我们有

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}, \tag{3.2}$$

这里 Q' 表示 Q 的导数.

例 设 $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z^2 + 1}$, 函数有两个单极点 $z = \pm i$. 我们有 $P/Q' = \dfrac{1}{2z} e^{iz}$, 从而 f 在极点 i 的留数等于 $-\dfrac{i}{2e}$.

多重极点情形 设 $f(z) = \dfrac{1}{(z - z_0)^k} g(z)$, 其中 $g(z)$ 在点 z_0 全纯, 而且 $g(z_0) \neq 0$. $f(z)$ 的留数等于 $g(z)$ 在点 z_0 的泰勒展式中 $(z - z_0)^{k-1}$ 的系数. 因此问题化为计算 $g(z)$ 的有限展式. 为此, 有时取新变数 $t = z - z_0$ 比较方便.

例 设 $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z(z^2 + 1)^2}$, 要计算 $f(z)$ 在二重极点 $z = i$ 的留数. 这时我们有

$$g(z) = \frac{e^{iz}}{z(z + i)^2}.$$

令 $z = i + t$, 并且求

$$h(t) = \frac{e^{i(i+t)}}{(i + t)(2i + t)^2}$$

的泰勒展式中 t 的系数. 只需写出下列各因子的一次有限展式:

$$e^{i(i+t)} = e^{-1}(1 + it + \cdots),$$

$$(i + t)^{-1} = -i(1 - it)^{-1} = -i(1 + it + \cdots),$$

$$(2i + t)^{-2} = -\frac{1}{4}\left(1 - \frac{i}{2}t\right)^{-2} = -\frac{1}{4}(1 + it + \cdots).$$

由此得

$$h(t) = \frac{i}{4e}(1 + 3it + \cdots),$$

从而所求留数是 $-\dfrac{3}{4e}$.

应用：对数导数的留数 设 $f(z)$ 是在 z_0 的邻域内亚纯的函数. 我们要计算对数导数 f'/f 在点 z_0 的留数. 我们有

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z),$$

其中 g 在点 z_0 全纯, $g(z_0) \neq 0$. 如果 f 在 z_0 全纯, 整数 $k \geqslant 0$; 如果 z_0 是 f 的极点, $k < 0$. 在上式两边取对数导数, 得

$$f'/f = \frac{k}{z - z_0} + g'/g.$$

因此 f'/f 以 z_0 为单极点, 在这极点的留数等于整数 k, 即零点 z_0 或极点 z_0 的重数 (在零点时取作正, 在极点时取作负).

4. 对确定亚纯函数的极点及零点个数的应用

命题 4.1 *设 $f(z)$ 是在开集 D 内不恒等于常数的亚纯函数, 又设 Γ 是含在 D 内的紧集 K 的有向边界. 假定函数 f 在 Γ 上无极点且不取值 a. 那么我们有*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)dz}{f(z) - a} = Z - P, \tag{4.1}$$

其中 Z 表示方程

$$f(z) - a = 0$$

在 K 内的根的重数之和, P 表示 f 在 K 内的极点的重数之和.

由留数定理, 并且算出函数 $\dfrac{f'(z)}{f(z) - a}$ 的留数, 就可立即推出上列命题.

特别, 当 f 是全纯函数时, (4.1) 左边的积分等于 $f(z) - a$ 在 K 内的零点的个数, 这时约定每个零点所算个数等于它的重数.

我们注意, (4.1) 左边的积分的值, 等于当 z 描出闭道路 Γ 时, $f(z) - a$ 的辐角的变化除以 2π (参看第二章 §1 第 5 段).

命题 4.2 *设 f 是在 z_0 的邻域内不恒等于常数的全纯函数, 而 z_0 是方程 $f(z) = a$ 的 k 重根. 那么对于 z_0 的任何充分小的邻域 V, 以及对于与 a 充分接近的任何 $b \neq a$, 方程 $f(z) = b$ 在 V 内恰好有 k 个解.*

事实上, 设 γ 是心为 z_0, 半径充分小的圆, 使得在以 γ 为边界的闭圆盘内, z_0 是方程 $f(z) = a$ 的唯一解. 还假定 γ 的半径充分小, 使得除去在 z_0 外, 在圆盘中其他

任何点, $f'(z) \neq 0$. 考虑积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)-b}dz. \tag{4.2}$$

现考虑 γ 在映射 f 下的像的余集. 我们知道, 当 b 在这余集的任一连通支集内变动时, (4.2) 保持为常数 (参看第二章 §1 第 8 段). 因此对于与 a 充分接近的任何 b, 我们有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f'(z)dz}{f(z)-b}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f'(z)dz}{f(z)-a}=k,$$

从而如果每个根按其重数计算, 方程 $f(z)=b$ 在 γ 内部恰好有 k 个根. 但 $b\neq a$ 且与 a 充分接近, 而在充分接近 z_0 的任何点 $z\neq z_0$, 导数 $f'(z)\neq 0$, 因而方程 $f(z)=b$ 的根都是单根. 命题 4.2 得证.

5. 对双周期函数的应用

设 e_1 及 e_2 是在实数域 $\mathbf{R}$ 上线性无关的两复数, 亦即 $e_1\neq 0$, 并且商 e_2/e_1 不是实数. 形如 $n_1e_1+n_2e_2$ 的所有向量形成域 $\mathbf{C}$ 的加法群的一个离散子群 Ω, 在这里 n_1 及 n_2 是任意整数. 如果对于平面上确定的函数 $f(z)$, 无论整数 n_1 及 n_2 是什么, 对于任何 z, 我们有

$$f(z+n_1e_1+n_2e_2)=f(z), \tag{5.1}$$

那么我们说 $f(z)$ 以群 Ω 作为周期群. 为此, 必须而且只需有

$$f(z+e_1)=f(z),\quad f(z+e_2)=f(z). \tag{5.2}$$

设 z_0 是任一复数. 考虑以 z_0, z_0+e_1, z_0+e_2, $z_0+e_1+e_2$ 为顶点的 (闭) 平行四边形. 它是由形如 $z_0+t_1e_1+t_2e_2$ 的点组成的, 在这里 $0\leqslant t_1\leqslant 1$, $0\leqslant t_2\leqslant 1$. 这样的平行四边形称为有第一顶点 z_0 的**周期平行四边形**. 现设 $f(z)$ 是在整个平面亚纯的函数, 它以群 Ω 作为周期群. 选取 z_0, 使得在有第一顶点 z_0 的周期平行四边形的边界 γ 上, $f(z)$ 没有极点. 我们可考虑积分 $\int_\gamma f(z)dz$, 由周期性, 其值为零. 事实上,

$$\int_{\gamma}f(z)dz=\int_0^1[f(z_0+te_1)-f(z_0+e_2+te_1)]dt$$
$$+\int_0^1[f(z_0+e_1+te_2)-f(z_0+te_2)]dt.$$

把这结果应用于对数导数 f'/f, 并且考虑命题 4.1, 我们得到:

命题 5.1 如果 $f(z)$ 是在整个平面亚纯的函数, 它不是常数, 并且以群 Ω 作为周期群, 如果在平行四边形的边界上没有函数 f 的零点或极点, 那么这函数含在一个周期平行四边形中零点的个数, 等于含在同一平行四边形中极点的个数.

系　在 $\mathbf{C}$ 上全纯并且以 Ω 作为周期群的函数是常数.

否则 $f(z)-a$ 的零点的个数应与极点的个数相等, 从而为零. 对任何 a 都是这样, 这是不可能的.

考虑函数 $zf'(z)/(f(z)-a)$. 这函数不是周期的, 因而我们不能断定它在一个周期平行四边形边界 γ 上积分为零. 现证明积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{zf'(z)dz}{f(z)-a} \tag{5.3}$$

的值属于周期群 Ω. 事实上, 它等于

$$-\frac{e_2}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f'(z)dz}{f(z)-a}+\frac{e_1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f'(z)dz}{f(z)-a},$$

其中 γ_1 表示平行四边形的起点为 z_0, 终点为 z_0+e_1 的边, γ_2 表示它的起点为 z_0, 终点为 z_0+e_2 的边. 而积分 $\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f'(z)dz}{f(z)-a}$ 及 $\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f'(z)dz}{f(z)-a}$ 有整数值. 另一方面, 积分 (5.3) 等于函数 $zf'(z)/(f(z)-a)$ 的留数之和. 现计算这些留数. 上述函数的极点是 $f'(z)$ 的极点及 $f(z)-a$ 的零点. 如果 β_i 是一极点, 在这极点的留数等于 $-k\beta_i$, 其中 k 表示极点的重数. 同样, 在 $f(z)-a$ 的零点 α_i 的留数等于 $k\alpha_i$, 其中 k 表示零点的重数.

总之, 我们得到:

命题 5.2　设 $f(z)$ 是在全平面的亚纯函数, 它不是常数, 并且以群 Ω 作为周期群. 对于任何复数 a, 我们有

$$\sum_i \alpha_i \equiv \sum_i \beta_i \qquad \bmod \Omega,$$

其中 α_i 表示方程 $f(z)=a$ 的根 (每个根的个数按它的重数计算), β_i 表示极点 (每个极点的个数按它的重数计算).

特别, 和 $\sum\limits_i \alpha_i$ 按模 Ω 与 a 无关.

§6. 用留数法计算积分

现在我们要这样计算定积分: 不求出积分号下函数的原函数, 而把积分的值表示为适当选取的全纯函数在奇点处的留数之和. 处理这种问题没有一般的方法. 我们将限于讨论几种经典的类型, 并且对每种类型指出怎样把问题化成留数计算.

第一种类型　计算形如

$$I=\int_0^{2\pi}R(\sin t,\cos t)dt$$

的积分, 其中 $R(x,y)$ 表示在圆 $x^2+y^2=1$ 上没有极点的有理函数. 令 $e^{it}=z$, 当 t 从 0 增加到 2π 时, z 描出单位圆. 因此 I 等于函数

$$\frac{1}{iz}R\left(\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right),\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)$$

在单位圆盘内极点处的留数之和乘以 $2\pi i$.

因此我们有

$$I=2\pi\sum\operatorname{Res}\left\{\frac{1}{z}R\left(\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right),\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)\right\},$$

其中和式是对单位圆盘内的极点作出的.

例 设 $I=\int_0^{2\pi}\dfrac{dt}{a+\sin t}$, 其中 a 表示实数 >1. 我们有

$$I=2\pi\sum\operatorname{Res}\frac{2i}{z^2+2iaz-1}.$$

单位圆盘内的唯一极点 z_0 是 $z_0=-ia+i\sqrt{a^2-1}$. 所求留数是 $\dfrac{i}{z_0+ia}=\dfrac{1}{\sqrt{a^2-1}}$, 由此得 $I=\dfrac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$.

第二种类型 考虑形如

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)dx$$

的积分, 其中 R 是没有实极点的有理函数. 还应假设积分收敛. 为此, 必须而且只需 $R(x)$ 在无穷远点的主要部分形如 $\dfrac{1}{x^n}$, 这里整数 $n\geqslant 2$. 一个等价的条件是

$$\lim_{|x|\to\infty}xR(x)=0. \tag{2.1}$$

为了计算积分 I, 要把复变量 z 的函数 $R(z)$ 沿着半平面 $y\geqslant 0$ 中以 O 为心, 以 r 为半径的半圆盘的边界 γ 积分 (图6). 对于充分大的 r, 函数 $R(z)$ 在边界 γ 上全纯, 并且积分 $\int_\gamma R(z)dz$ 等于 R 在 γ 内部的极点处留数之和. 因此我们有

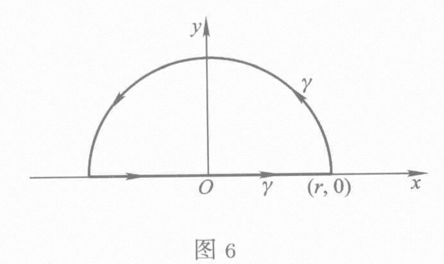


图 6

$$\int_{-r}^{+r}R(x)dx+\int_{\delta(r)}R(z)dz=2\pi i\sum\operatorname{Res}(R(z)), \tag{2.2}$$

其中 $\delta(r)$ 表示按正向描出的以 O 为心，以 r 为半径的半圆周，而和式是对半平面 $y>0$ 内极点处的留数作出的.

当 r 趋向于 $+\infty$ 时，(2.2) 左边第一个积分趋近于 I. 我们将要证明 (2.2) 左边第二个积分趋近于 0. 由此得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx = 2\pi i \sum \mathrm{Res}(R(z)), \tag{2.3}$$

其中和式是对上半平面 $y>0$ 内 R 的所有极点作出的. 同样，我们还可看出

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx = -2\pi i \sum \mathrm{Res}(R(z)),$$

这次和式是对下半平面 $y<0$ 内 R 的所有极点作出的.

还只需证明：当 r 趋向于 $+\infty$ 时，$\int_{\delta(r)} R(z)dz$ 趋近于 0. 这可由下列引理立即推出.

引理 1 设 $f(z)$ 是在扇形

$$\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$$

中确定的函数，r 及 θ 表示 z 的模和辐角. 如果

$$\lim_{|z|\to\infty} zf(z) = 0 \quad (\theta_1 \leqslant \arg z \leqslant \theta_2),$$

那么当 r 趋向 $+\infty$ 时，沿扇形中以 r 为半径的圆弧所取积分 $\int f(z)dz$ 趋近于 0.

事实上，设 $M(r)$ 是 $|f(z)|$ 在圆 $|z|=r$ 的弧上的上确界. 我们有

$$\left|\int f(z)dz\right| \leqslant M(r)r(\theta_2-\theta_1),$$

由此引理立即得证.

同样可证明下列引理：

引理 2 设 $f(z)$ 是在扇形

$$\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$$

中确定的函数，r 及 θ 表示 z 的模及辐角. 如果

$$\lim_{z\to 0} zf(z) = 0 \quad (\theta_1 \leqslant \arg z \leqslant \theta_2),$$

那么当 r 趋近于 0 时，沿扇形中以 r 为半径的圆弧所取积分 $\int f(z)dz$ 趋近于 0.

例 试计算积分

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6}.$$

函数 $\frac{1}{1+z^6}$ 有 6 个极点, 都在单位圆上. 上半平面中的 3 个极点是

$$e^{i\frac{\pi}{6}},\quad e^{i\frac{\pi}{2}},\quad e^{5i\frac{\pi}{6}}.$$

在每个这样的极点处的留数等于 $\frac{1}{6z^5}=-\frac{z}{6}$. 由此得

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^6}=-\frac{\pi i}{6}\left(e^{i\frac{\pi}{6}}+e^{i\frac{\pi}{2}}+e^{5i\frac{\pi}{6}}\right)$$
$$=\frac{\pi}{6}\left(2\sin\frac{\pi}{6}+1\right)=\frac{\pi}{3}.$$

第三种类型 现研究形如

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{ix}dx$$

的积分, 其中 $f(x)$ 在闭半平面 $y\geqslant 0$ 上每一点为全纯函数, 但可能除去有限个点外. 首先考虑奇点不在实轴上的情形. 这时积分

$$\int_{-r}^{r}f(x)e^{ix}dx$$

有意义, 并且只要积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{ix}dx$$

收敛, 当 r 趋向于 $+\infty$ 时, $\int_{-r}^{r}f(x)e^{ix}dx$ 的值趋近于上列积分.

现证明下列结果:

命题 3.1 如果对于 $y\geqslant 0$, $\lim\limits_{|z|\to\infty}f(z)=0$, 那么

$$\lim_{r\to+\infty}\int_{-r}^{+r}f(x)e^{ix}dx=2\pi i\sum\operatorname{Res}(f(z)e^{iz}),\tag{3.1}$$

其中和式是对 $f(z)$ 在上半平面 $y>0$ 内所有奇点作出的.

首先注意: 如果积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛, 所讨论的积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{ix}dx$ 绝对收敛. 这时由关系式 (3.1) 得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{ix}dx=2\pi i\sum\operatorname{Res}(f(z)e^{iz}).\tag{3.2}$$

积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{ix}dx$ 也可能收敛, 但不绝对收敛. 例如我们知道, 如果对于 $x>0$, 函数 $f(x)$ 是实的和单调的, 并且当 x 趋向于 $+\infty$ 时, 它趋近于 0, 那么积分 $\int_{0}^{+\infty}f(x)e^{ix}$ 收敛 (应用第二中值公式), 这时关系式 (3.2) 仍然成立.

在开始证明命题 3.1 以前, 我们注意: 在半平面 $y \geqslant 0$ 中, $|e^{iz}| \leqslant 1$. 于是可沿上述第二种类型中已用过的. 在半平面 $y \geqslant 0$ 中的周线作积分. 用与 (2.2) 中相同的记号, 我们要证明:当 r 趋向于 $+\infty$ 时, 积分 $\int_{\delta(r)} f(z)e^{iz}dz$ 趋近于 0. 由此显然可推出命题 3.1.

如果已知 $\lim\limits_{|z|\to\infty} zf(z) = 0$, 只需应用引理 1. 于是在这种情形下关系式 (3.1) 得证. 例如, 考虑积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+1}dx\right).$$

其值等于 $\pi i \sum \mathrm{Res}\left(\dfrac{e^{iz}}{z^2+1}\right)$, 和式是对上半平面内的极点作出的. 现只有一个极点 $z = i$, 它是单极点, 在这点的留数是 $\dfrac{e^{-1}}{2i}$, 由此得

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{2e}.$$

为了只在命题 3.1 中所叙述的假设下证明 $\int_{\delta(r)} f(z)e^{iz}dz$ 趋于 0, 我们要应用下列引理:

引理 3 设 $f(z)$ 是在半平面 $y \geqslant 0$ 中扇形上确定的函数. 如果 $\lim\limits_{|z|\to+\infty} f(z) = 0$, 那么当 r 趋向于 $+\infty$ 时, 在扇形中半径为 r 的圆弧上所取积分 $\int f(z)e^{iz}dz$ 趋近于零.

事实上, 令 $z = re^{i\theta}$, 并且设 $M(r)$ 是当 θ 变动时 $|f(re^{i\theta})|$ 的上确界, 这里点 $re^{i\theta}$ 取在上述扇形中. 我们有

$$\left|\int f(z)e^{iz}dz\right| \leqslant M(r)\int_0^{\pi} e^{-r\sin\theta}rd\theta. \tag{3.3}$$

现要证明 $\int_0^{\pi} e^{-r\sin\theta}rd\theta$ 的绝对值不超过与 r 无关的一个确定的数, 这样就可完成引理 3 的证明. 事实上, 我们有

$$\int_0^{\pi} e^{-r\sin\theta}rd\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r\sin\theta}rd\theta \leqslant \pi. \tag{3.4}$$

(3.4) 的**证明**: 对于 $0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, 我们有

$$\frac{2}{\pi} \leqslant \frac{\sin\theta}{\theta} \leqslant 1,$$

由此得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r\sin\theta}rd\theta \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi}r\theta}rd\theta \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-\frac{2}{\pi}r\theta}rd\theta = \frac{\pi}{2}.$$

于是命题 3.1 证完.

现考察函数 $f(z)$ 在实轴上可能有奇点情形. 我们限于讨论一个例子, 即 $f(z)$ 在原点有单极点的一个例子. 这时应改变积分道路, 使得它在上半平面围绕原点, 有一心在原点, (小的) 半径为 $\varepsilon>0$ 的半圆 $\gamma(\varepsilon)$ (图 7). 以后要用到下列引理:

引理 4 如果 $z=0$ 是 $g(z)$ 的单极点, 我们有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma(\varepsilon)} g(z)dz=\pi i\ \mathrm{Res}(g,0), \tag{3.5}$$

其中 $\gamma(\varepsilon)$ 是按辐角增加的方向通过的.

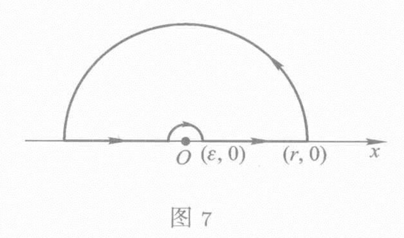


图 7

事实上, 我们有 $g(z)=\frac{a}{z}+h(z)$, 其中 h 表示在原点全纯的函数. 当 ε 趋近于 0 时, 积分 $\int_{\gamma(\varepsilon)} h(z)dz$ 趋近于 0. 而积分 $\int_{\gamma(\varepsilon)} \dfrac{a}{z}dz$ 等于 πia. 由此得关系式 (3.4).

这引理将应用于函数 $g(z)=f(z)e^{iz}$.

例 计算积分

$$\begin{aligned} I&=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx\\ &=\frac{1}{2i}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{e^{ix}}{x}dx+\int_{+\varepsilon}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x}dx\right]. \end{aligned}$$

由图 7, I 等于

$$\frac{1}{2i}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma(\varepsilon)}\frac{e^{iz}}{z}dz=\frac{\pi}{2}\mathrm{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z},0\right)=\frac{\pi}{2}.$$

重要注释 如果要计算的是积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ix}dx$, 而不是 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}dx$, 那么必须在下半平面内积分, 而不是在上半平面. 事实上, 正是在下半平面 $y\leqslant 0$, 函数 $|e^{-iz}|$ 有界, 从而在下半平面可应用引理 3 (证明作必要的改变.) 更一般地, 计算形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ax}dx$ (其中 a 是复常数) 的积分, 要在满足 $|e^{az}|\leqslant 1$ 的半平面上积分.

不要忘记 $\sin z,\cos z$ 在任何半平面上无界. 为了计算形如

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin^n x dx,\quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos^n x dx$$

的积分, 总是用复指数函数表示三角函数, 从而可应用上述方法.

第四种类型 考虑形如

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{R(x)}{x^\alpha}dx$$

的积分, 其中 α 表示满足 $0<\alpha<1$ 的实数, R 是在半实轴 $x\geqslant 0$ 上无极点的有理函数. 显然, 这样的积分对于积分限 0 收敛. 要使它对积分限 $+\infty$ 收敛, 必须而且只需 $R(x)$ 的主要部分在无穷远有 $\dfrac{1}{x^n}$ 的形状, 其中 $n\geqslant 1$. 换句话说, 必须而且只需

$$\lim_{x\to+\infty}R(x)=0. \tag{4.1}$$

要计算这样的积分, 我们考虑复变量 z 的函数 $f(z)=\frac{R(z)}{z^\alpha}$, 这函数在除去半实轴 $x\geqslant 0$ 的平面有定义. 设这样确定的开集是 D. 应确定 z^α 在 D 内所选取的分支: 我们选取 z 的辐角包含在 0 及 2π 之间的分支.

这样约定后, 沿如下确定的闭道路 $\delta(r,\varepsilon)$ 积分: 依次在实轴上从 $\varepsilon>0$ 到 $r>0$, 按正向过心为 O, 半径为 r 的圆 $\gamma(r)$, 然后在实轴上从 r 到 ε, 最后按逆向过心为 O, 半径为 ε 的圆 $\gamma(\varepsilon)$ (参看图 8). 如果 r 选取得充分大, 而 ε 选取得充分小, 积分

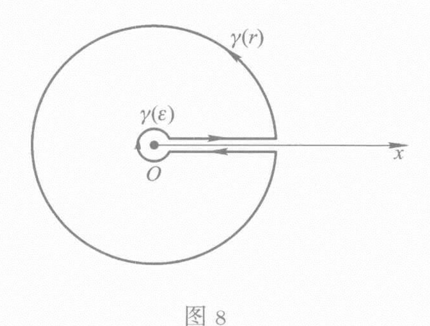


图 8

$$\int_{\delta(r,\varepsilon)}\frac{R(z)}{z^\alpha}dz$$

等于 $\dfrac{R(z)}{z^\alpha}$ 在 D 内极点处留数之和. 因为当 z 的辐角等于 2π 时, 我们有 $z^\alpha=e^{2\pi i\alpha}|z|^\alpha$ 所以

$$\int_{\delta(r,\varepsilon)}\frac{R(z)}{z^\alpha}dz=\int_{\gamma(r)}\frac{R(z)}{z^\alpha}dz+\int_{\gamma(\varepsilon)}\frac{R(z)}{z^\alpha}dz$$
$$+(1-e^{-2\pi i\alpha})\int_\varepsilon^r\frac{R(x)}{x^\alpha}dx.$$

既然 z 的辐角有界, 当 z 趋近于 0 或当 $|z|$ 趋近于正无穷大时, $zf(z)$ 趋近于 0. 因此当 r 趋向于 $+\infty$ 及当 ε 趋近于 0 时, 沿 $\gamma(r)$ 及 $\gamma(\varepsilon)$ 的积分趋近于 0 (引理 1 和

2). 取极限, 于是我们得到

$$(1-e^{-2\pi i\alpha})I = 2\pi i\sum \mathrm{Res}\left(\frac{R(z)}{z^{\alpha}}\right); \tag{4.2}$$

由这关系式可算出 I.

例 计算 $I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}(1+x)}$, $(0<\alpha<1)$. 在这里我们有 $R(z)=\frac{1}{1+z}$, 只有一个极点 $z=-1$, $\frac{R(z)}{z^{\alpha}}$ 在这极点的留数等于 $\frac{1}{e^{\pi i\alpha}}$, 这里取的 z 的辐角的分支, 是在 -1 这点等于 π 的一支. 于是由关系式 (4.2) 可得

$$I=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}.$$

第五种类型 考虑形如

$$\int_0^{+\infty} R(x)\log x dx$$

的积分, 其中 R 是在半实轴 $x\geqslant 0$ 上无极点的有理函数, 并且满足 $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,R(x)=0$. 最后这一条件可保证积分收敛.

考虑研究第四种类型积分时引进的同样的开集 D 以及同样的积分道路. 在这里也应确定选取 $\log z$ 的分支, 选取 z 的辐角包含在 0 及 2π 之间. 根据在下面即可看出的理由, 我们将要求的不是函数 $R(z)\log z$ 的积分, 而是函数 $R(z)(\log z)^2$ 的积分. 在这里当 r 趋向于 $+\infty$, ε 趋近于 0 时, 由引理 1, 沿圆 $\gamma(r)$ 及 $\gamma(\varepsilon)$ 的积分趋近于 0. 当 z 的辐角等于 2π 时, 我们有

$$\log z=\log x+2\pi i,$$

其中 x 表示 z 的模. 于是得到关系式

$$\int_0^{+\infty} R(x)(\log x)^2 dx-\int_0^{+\infty} R(x)(\log x+2\pi i)^2 dx$$
$$=2\pi i\sum \mathrm{Res}\{R(z)(\log z)^2\},$$

由此得

$$-2\int_0^{+\infty} R(x)\log x\,dx-2\pi i\int_0^{+\infty} R(x)dx$$
$$=\sum \mathrm{Res}\{R(z)(\log z)^2\}. \tag{5.1}$$

在原则上, 这只给出了两积分 $\int_0^{+\infty} R(x)dx$ 及 $\int_0^{+\infty} R(x)\log x\,dx$ 之间的关系式. 但设有理函数 $R(x)$ 是实的 (即对于实的 x 取实值), 分离关系式 (5.1) 中的实部及虚部, 就可得到两个关系式:

$$\int_0^{+\infty} R(x)\log x\,dx=-\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\sum \mathrm{Res}\{R(z)(\log z)^2\}), \tag{5.2}$$

$$\int_0^{+\infty} R(x)dx = -\frac{1}{2\pi}\mathrm{Im}(\sum \mathrm{Res}\{R(z)(\log z)^2\}). \tag{5.3}$$

这里求和是对有理函数 $R(z)$ 在 D 内的所有极点作出的.

例 计算积分

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(1+x)^3} dx.$$

$\dfrac{(\log z)^2}{(1+z)^3}$ 在极点 $z=-1$ 处的留数等于 $(i\pi + \log(1-t))^2$ 的有限项展式中 t^2 的系数, 这数等于 $1-i\pi$, 于是求得 $I = -\dfrac{1}{2}$.

注意 如果求函数 $R(z)\log z$ 的积分, 同样我们应得到公式

$$\int_0^{+\infty} R(x)dx = -\sum \mathrm{Res}\{R(z)\log z\}. \tag{5.4}$$

在某些情况下, 有理函数 R 在点 $x=1$ 有单极点, 这时上述方法也可应用. 在这种情况下, 由于 $\log z$ 的主支以点 1 作为单零点, 积分 $\int_0^{+\infty} R(x)\log x\,dx$ 仍有意义. 但现在要修改前面用过的积分道路: 当沿着正实轴积分, 取 z 的辐角等于 2π 时, 应沿着心为 1, 半径很小的一个半圆绕过点 $z=1$ (图 9). 读者可证明: 当函数 R 是实有理函数时, 我们有关系式

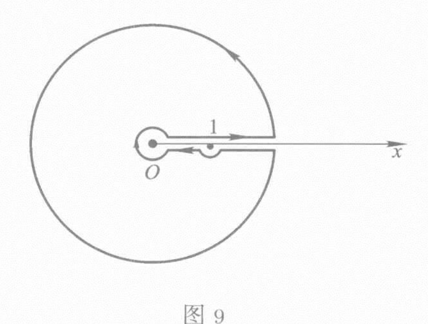


图 9

$$\int_0^{+\infty} R(x)\log x\,dx = \pi^2\mathrm{Re}(\mathrm{Res}(R,1)) - \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\sum \mathrm{Res}(f)), \tag{5.5}$$

其中函数 f 表示函数 $R(z)(\log z)^2$, 和式是对 $z=1$ 以外的 f 的所有极点作出的. 例如, 可以证明

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{x^2-1} dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

习　题

1. 设 $f(z)$ 在 $|z|<R(R>1)$ 内全纯. 用两种不同方法求在单位圆上按正向取的积分:

$$\int_{|z|=1}\left(2\pm\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)\frac{f(z)}{z}dz,$$

并且由此导出下列等式:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})\cos^2\frac{\theta}{2}d\theta=2f(0)+f'(0),$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})\sin^2\frac{\theta}{2}d\theta=2f(0)-f'(0).$$

2. 设 $f(z)$ 在包含圆盘 $|z|\leqslant R$ 的一个开集内全纯, 并且设 γ 是圆 $|z|=R$ 在映射 $z\to f(z)$ 下的像. 假定 f 是单叶的, 亦即如果 $z\neq z'$, 那么 $f(z)\neq f(z')$. 证明 γ 的长 L 等于 $R\int_0^{2\pi}|f'(Re^{i\theta})|d\theta$. 由此推出

$$L\geqslant 2\pi R|f'(0)|.$$

证明在同样的条件下, 闭圆盘 $|z|\leqslant R$ 在同一映射下的像之面积 A, 可由下式给出:

$$A=\iint\limits_{|z|\leqslant R}|f'(x+iy)|^2dx\,dy;$$

并且由此导出下列不等式:

$$A\geqslant \pi R^2|f'(0)|^2.$$

(用极坐标, 并且注意: 由于柯西 – 施瓦茨关于积分的不等式, 我们有: 对于 $0\leqslant r\leqslant R$

$$\begin{aligned}|f'(0)|^2&=\frac{1}{4\pi^2}\left|\int_0^{2\pi}f'(re^{i\theta})d\theta\right|^2\\&\leqslant\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}|f'(re^{i\theta})|^2d\theta\cdot\int_0^{2\pi}d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f'(re^{i\theta})|^2d\theta.)\end{aligned}$$

3. 证明: 如果 $f(z)$ 在包含闭圆盘 $|z|\leqslant 1$ 的一个开集内全纯, 那么我们有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{\overline{f(z)}}{z-a}dz=\begin{cases}\overline{f(0)}, & \text{如果 } |a|<1;\\ \overline{f(0)}-\overline{f(1/\overline{a})}, & \text{如果 } |a|>1,\end{cases}$$

积分是按正向取的. (应用第二章习题 1.b 以及柯西积分公式.)

4. 设 $f(z)$ 在整个平面全纯, 并且假定存在整数 n 以及两个正实数 R,M, 使得对于 $|z|\geqslant R$, 我们有

$$|f(z)|\leqslant M|z|^n$$

证明这时 $f(z)$ 是至多 n 次的多项式.

5. 设 f 是在连通开集 D 内不恒等于常数的全纯函数, 并且设 D' 是一连通开集, 其闭包 $\overline{D'}$ 是紧的, 并包含在 D 内. 证明: 如果 $|f(z)|$ 在 D' 的边界上是常数, 那么在 D' 内至少有 $f(z)$ 的一个零点. (考虑 $\dfrac{1}{f(z)}$, 用反证法.)

6. 设 D 是有界连通开集, 并且考虑 $\mathbf{R}^2$ 平面上的 n 个点 $P_1, P_2, \cdots, P_n$. 证明: 在闭包 $\overline{D}$ 中变动的点 P 与点 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 的距离的乘积, 在 D 的边界上一点达到它的最大值.

7. 设 $f(z)$ 是在圆盘 $|z| < R$ 内全纯的函数, 并且对于 $0 \leqslant r < R$, 令 $M(r) = \sup\limits_{|z|=r} |f(z)|$. 证明:

a) 在 $0 \leqslant r < R$ 中, $M(r)$ 是 r 的连续 (广义) 增函数;

b) 如果 $f(z)$ 不恒等于常数, $M(r)$ 是严格递增的.

8. 阿达马 “三圆定理”: 设 $f(z)$ 是在包含闭圆环

$$r_1 \leqslant |z| \leqslant r_2 \quad (0 < r_1 < r_2)$$

的一个开集内全纯的函数, 并且对于 $r_1 \leqslant r \leqslant r_2, M(r) = \sup\limits_{|z|=r} |f(z)|$. 证明有下列不等式: 对于 $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$,

$$M(r) \leqslant M(r_1)^{\frac{\log r_2 - \log r}{\log r_2 - \log r_1}} \cdot M(r_2)^{\frac{\log r - \log r_1}{\log r_2 - \log r_1}}. \tag{1}$$

(对函数 $z^p(f(z))^q$ 应用最大模原理, 这里 p 及 q 是整数, 并且 $q > 0$. 然后选取实数 α, 使得 $r_1^\alpha M(r_1) = r_2^\alpha M(r_2)$; 选取整数对序列 (p_n, q_n), 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n/q_n = \alpha$.) 证明不等式 (1) 表明: 对于 $r_1 \leqslant r \leqslant r_2, \log M(r)$ 是 $\log r$ 的凸函数.

9. 设 $f(z)$ 在 $|z| < R$ 内全纯, 并且对于 $0 \leqslant r < R$, 令

$$I_2(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta.$$

证明: 如果 a_n 表示 $f(z)$ 在点 $z = 0$ 的第 n 个泰勒系数, 我们有

$$I_2(r) = \sum_{n\geqslant 0} |a_n|^2 r^{2n}.$$

由此推出: 如果 $0 \leqslant r < R$,

(i) $I_2(r)$ 是 r 的连续增函数 (在广义下);

(ii) 我们有 $|f(0)|^2 \leqslant I_2(r) \leqslant (M(r))^2$($M(r)$ 的意义与习题 7 中一样);

(iii) 当 f 不恒等于零时, $\log I_2(r)$ 是 $\log r$ 的凸函数. (证明: 如果令

$$s = \log r, J(s) = I_2(e^s) = \sum_{n\geqslant 0} |a_n|^2 e^{2ns},$$

我们有

$$(\log J)'' = \frac{J''J - (J')^2}{J^2}.$$

为了证明 $JJ'' - (J')^2 \geqslant 0$, 对绝对收敛级数

$$|\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n \overline{\beta}_n|^2 \leqslant (\sum_{n\geqslant 0} |\alpha_n|^2)(\sum_{n\geqslant 0} |\beta_n|^2)$$

应用柯西 – 施瓦茨不等式.)

10. 设 f 是在圆盘 $|z| < 1$ 全纯的函数, 而且在这圆盘内, $|f(z)| < 1$. 如果在圆盘内有不同两点 a 及 b, 使得 $f(a) = a, f(b) = b$, 那么在这圆盘内, 我们有 $f(z) = z$. (考虑函数 $g(z) = \dfrac{h(z)-a}{1-\overline{a}h(z)}$, 其中 $h(z) = f\left(\dfrac{z+a}{1+\overline{a}z}\right)$. 对于这函数, 我们有 $g(0) = 0$, $g\left(\dfrac{b-a}{1-\overline{a}b}\right) = \dfrac{b-a}{1-\overline{a}b}$, 并且在圆盘内, $|g(z)| < 1$.)

11. 设 f 是在包含圆盘 $|z| \leqslant R$ 的开集内全纯的函数. 对于 $0 \leqslant r \leqslant R$, 令

$$A(r) = \sup_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} \mathrm{Re}(f(re^{i\theta})).$$

(i) 证明 $A(r)$ 是 r 的连续 (广义) 增函数 (注意 $e^{\mathrm{Re} f(z)} = |e^{f(z)}|$).

(ii) 证明: 如果还有 $f(0) = 0$, 那么对于 $0 \leqslant r < R$, 就有

$$M(r) \leqslant \frac{2r}{R-r} A(R).$$

(考虑函数 $g(z) = f(z)/(2A(R) - f(z))$.)

(iii) 证明我们有: 对于 $0 \leqslant r < R$,

$$M(r) \leqslant \frac{2r}{R-r} A(R) + \frac{R+r}{R-r} |f(0)|.$$

12. 设 x 是复参数

(i) 证明函数

$$\exp\left(x\left(z+\frac{1}{z}\right)\Big/2\right)$$

在原点 $z = 0$ 的洛朗展式有下列形状: 对于 $0 < |z| < +\infty$,

$$\exp\left(x\left(z+\frac{1}{z}\right)\Big/2\right) = a_0 + \sum_{n\geqslant 1} a_n\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right),$$

其中对于 $n \geqslant 0$,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{x\cos t}\cos nt\, dt.$$

证明: 函数 $\exp\left(x\left(z-\dfrac{1}{z}\right)\Big/2\right)$ 同样有下列展式: 对于 $0 < |z| < +\infty$,

$$\exp\left(x\left(z-\frac{1}{z}\right)\Big/2\right) = b_0 + \sum_{n\geqslant 1} b_n\left(z^n + \frac{(-1)^n}{z^n}\right),$$

其中对于 $n \geqslant 0$,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(nt - x\sin t)dt.$$

(注意: 如果 $z' = -1/z$, 对于 $0 < |z| < +\infty$, 有

$$\exp(x(z' - 1/z')/2) = \exp(x(z - 1/z)/2).)$$

(ii) 设 m 及 n 为两整数 $\geqslant 0$. 证明我们有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{(z^2\pm 1)^m dz}{z^{m+n+1}}$$
$$=\begin{cases}\dfrac{(\pm 1)^p(n+2p)!}{p!(n+p)!}, & \text{如果 } m=n+2p, \text{ 且 } p \text{ 为整数} \geqslant 0;\\[2ex] 0, & \text{在其他情形下.}\end{cases}$$

把 a_n 及 b_n 看作参数 x 的函数 (看作 x 的函数的 b_n 称为第一类贝塞尔函数), 由此可推出它们的幂级数展式.

13. 设 $f(z)$ 是在原点 $z=0$ 的邻域内亚纯的函数, 并以原点为单极点. 设 x 为任一复数. 证明 z 的函数

$$\frac{f'(z)}{f(z)-x}$$

的洛朗展式有下列形状:

$$-\frac{1}{z}+u_1+u_2 z+\cdots+u_{n+1}z^n+\cdots,$$

其中 u_n 是 x 的多项式, 其次数恰好为 n. (证明中可应用函数 $zf(z)$ 的泰勒展式.)

14. 设 $f(z)$ 是在上半平面 P^+ (由 $\mathrm{Im}(z)>0$ 确定) 内全纯的函数. 假定对于任何 $z\in P^+$, $f(z+1)=f(z)$. 证明存在着在去心圆盘 $0<|t|<1$ 内全纯的函数 $g(t)$, 使得对于 $z\in P^+$, 我们有

$$f(z)=g(e^{2\pi iz}).$$

由此推出 $f(z)$ 有下列形状的展式:

$$f(z)=\sum_{-\infty<n<+\infty}a_n e^{2\pi inz},$$

其中对于任意的 $y>0$,

$$a_n=\int_0^1 f(x+iy)e^{-2\pi in(x+iy)}dx,$$

证明在 P^+ 中任何紧集上, 这级数正规收敛. 证明如果存在常数 $M>0$ 及整数 n_0, 使得对于充分大的 y, 并且一致地对于 x, 我们有

$$|f(x+iy)|\leqslant Me^{2\pi n_0 y},$$

那么展式有下列形状:

$$f(z)=\sum_{n\geqslant -n_0}a_n e^{2\pi inz}.$$

15. (i) 证明函数 $f(z)=1/(e^z-1)$ 在整个平面 $\mathbf{C}$ 亚纯, 并且以点 $z=2p\pi i(p\in\mathbf{Z})$ 作为单极点. 计算在点 $z=2p\pi i$ 的洛朗展式. 如果 $a_n(n\geqslant -1)$ 表示 $p=0$ 时展开式的系数, 证明 $a_{2q}=0,\ q=1,2,\cdots$; 并且如果对于 $n\geqslant 1$, 令

$$B_n=(-1)^{n-1}(2n)!a_{2n-1},$$

证明我们有下列递推关系式: 对于 $n \geqslant 1$,

$$\frac{1}{(2n+1)!} - \frac{1}{2(2n)!} + \sum_{1 \leqslant \nu \leqslant n} \frac{(-1)^{\nu-1} B_\nu}{(2\nu)!(2n-2\nu+1)!} = 0.$$

(比较下列关系式中两边的系数:

$$\left(a_{-1}/z + \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n \right) \left(\sum_{m \geqslant 1} z^m/m!) = 1. \right)$$

(ii) 对于 $n \geqslant 1$, 令

$$f_{2n}(z) = \frac{1}{z^{2n(e^z-1)}}.$$

设 γ_m 是以点 $\pm(2m+1)\pi \pm (2m+1)\pi i$ 为顶点的正方形的边界. 证明我们有: 如果 z 在 γ_m 上,

$$|f_{2n}(z)| \leqslant 2/((2m+1)\pi)^{2n}.$$

取 $f_{2n}(z)$ 按正向沿围线 γ_m 的积分, 并且使 $m \to \infty$, 由此推出

$$\sum_{p \geqslant 1} 1/p^{2n} = \frac{(2\pi)^{2n} B_n}{2(2n)!}.$$

(请注意: 数 B_n 称为伯努利数.)

16. 设 $f(z)$ 是在去心圆盘 D: $0 < |z-c| < \rho$ 内全纯的函数, c 是 $f(z)$ 的本性奇点.

(i) 无论 $\gamma \in \mathbf{C}$ 及 $\varepsilon > 0$ 是什么, 证明存在着 $z' \in D$ 及实数 $\varepsilon' > 0$, 使得我们有

$$\overline{\Delta}(f(z'), \varepsilon') \subset \Delta \cap \Delta(\gamma, \varepsilon),$$

其中 Δ 表示 D 在变换 $z \to f(z)$ 下的像: 用 $\Delta(b, r)$ (或 $\overline{\Delta}(b, r)$) 表示以 b 为心, 以 r 为半径的开 (或闭) 圆盘. (注意由 §5 命题 4.2 可推出 Δ 是开的 (这也可由第六章 §1 第 3 段的定理推出), 然后应用 §4 第 4 段中的魏尔斯特拉斯定理.)

(ii) 对 $n \geqslant 0$, 设 D_n 是去心圆盘 $0 < |z-c| < \rho/2^n$, 并且 Δ_n 是它在 f 下的像. 已给 $\gamma_0 \in \mathbf{C}$, $\varepsilon_0 > 0$, 就 n 递推证明: 存在着正实数序列 $(\varepsilon_n)_{n \geqslant 1}$ 及 D 内点列 $(z_n)_{n \geqslant 1}$, 满足下列条件: 对 $n \geqslant 1$,

$$z_n \in D_{n-1},\ \varepsilon_0 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots,$$

$$\overline{\Delta}(f(z_1), \varepsilon_1) \subset \Delta \cap (\gamma_0, \varepsilon_0),$$

$$\overline{\Delta}(f(z_{n+1}), \varepsilon_{n+1}) \subset \Delta \cap \Delta(f(z_n), \varepsilon_n),$$

并且由此证明: 存在着 D 内点列 $(c_n)_{n \geqslant 0}$, 使得我们有

$$\lim c_n = c,$$

并且对任何 $n, f(c_n) = \gamma$, $|\gamma - \gamma_0| < \varepsilon_0$. 还证明无论半径 r 怎样小, $f(z)$ 在去心圆盘 $0 < |z-c| < r$ 内不是单叶的.

17. 设 $\varphi : (x, y, u) \to z$ 是从 $S_2 - P$ 到 $\mathbf{C}$ 上的球极平面射影.

(i) 把 x, y 及 u 表示为 z 的函数.

(ii) 证明: 如果 C 是 S_2 上不过 P 的圆, 那么 $\varphi(C)$ 是平面 $\mathbf{C}$ 上的圆, 并且如果 C 过 $P, \varphi(C-P)$ 是 $\mathbf{C}$ 上的直线.

(iii) 设 $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$. 为了使得 $\varphi^{-1}(z_1)$, $\varphi^{-1}(z_2)$ 是对蹠点, 必须而且只需我们有 $z_1 \cdot \overline{z}_2 = -1$.

(iv) 证明

$$P_1 = \varphi^{-1}(z_1) \quad \text{及} \quad P_2 = \varphi^{-1}(z_2)$$

(在 $\mathbf{R}^3$ 中) 的距离 $\overline{P_1P_2}$ 由下列公式给出:

$$\overline{P_1P_2} = \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}}.$$

当 z_2 趋向于无穷远点时, 这公式变成怎样?

18. 证明在黎曼球面上到处亚纯的函数必然是有理函数. (首先证明这样的函数只有有限个极点.)

19. 鲁歇定理: 设 $f(z)$ 及 $g(z)$ 是在开集 D 内全纯的函数, 并且设 $\Gamma = (\Gamma_i)_{i \in I}$ 是包含在 D 内的紧集 K 的有向边界. 如果我们有: 在 Γ 上,

$$|f(z)| > |g(z)|,$$

证明 $f(z)+g(z)$ 在 K 内的零点个数等于 $f(z)$ 在 K 内的零点个数. (考虑闭道路 $f \circ \Gamma_i, i \in I$, 并且应用 §5 命题 4.1 以及第二章 §1 命题 8.3.)

例 如果 $f(z)$ 在包含闭圆盘 $|z| \leqslant 1$ 的开集内全纯, 并且如果对于 $|z|=1$, $|f(z)|<1$, 那么对于任何整数 $n \geqslant 1$, 方程 $f(z) = z^n$ 在 $|z|<1$ 内恰好有 n 个解.

20. 用留数法计算下列积分:

(i) $\int_0^{+\infty} \dfrac{dx}{(a+bx^2)^n} \quad (a, b > 0)$,

(ii) $\int_0^{+\infty} \dfrac{\cos 2ax - \cos 2bx}{x^2} dx \quad (a, b \text{ 为实数})$,

(iii) $\int_0^{+\infty} \dfrac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2} \dfrac{\sin x}{x} dx \quad (a > 0)$,

(iv) $\int_0^{\pi} \dfrac{\cos nt\, dt}{1 - 2a\cos t + a^2} \quad (a \neq 1)$

(取函数 $z^n/(z-a)(z-1/a)$ 在单位圆上的积分).

21. 求函数 $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+a^2)\log z}$ 沿闭道路 $\delta(r, \varepsilon)$ 的积分, 其中 log 表示满足 $-\pi \leqslant \arg z \leqslant \pi$ 的分支, $\delta(r, \varepsilon)$ 确定如下: 我们依次先沿负实轴从 $-r$ 到 $-\varepsilon$, 再按逆向沿以 O 为心, ε 为半径的圆 $r(\varepsilon)$ 前进, 然后沿负实轴从 $-\varepsilon$ 到 $-r$, 最后按正向沿以 O 为心, r 为半径的圆前进 $(O < \varepsilon < a < r)$. 由此推出

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)((\log x)^2 + \pi^2)} = \frac{\pi}{2a((\log a)^2 + \pi^2/4)} - \frac{1}{1+a^2}.$$

22. 设 $a > 0$, ν 是实数. 取函数 $e^{i\nu z}/(\operatorname{ch} z + \operatorname{ch} a)$ 沿以 $\pm R, \pm R + 2\pi i$ 为顶点的矩形边界的积分, 证明

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \nu x\, dx}{\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} a} = \frac{\pi \sin \nu a}{\operatorname{sh} \pi\nu \operatorname{sh} a}.$$

23. (i) 设 n 是一整数 $\geqslant 2$, 考虑以正实轴上的线段 $[0,R]$, $Re^{it}(0\leqslant t\leqslant 2\pi/n)$ 表示的弧以及 $re^{2\pi i/n}(0\leqslant r\leqslant R)$ 表示的线段所形成的围线. 取函数 $1/(1+z^n)$ 沿这围线的积分, 证明

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^n}=\frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)}.$$

(ii) 设 n 是一 $\geqslant 2$ 的整数, α 是满足 $n>1+\alpha>0$ 的一实数. 用同样的方法计算积分

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{\alpha}dx}{1+x^n}.$$

24. 设 p 及 q 为两实数 >0, n 是一 $\geqslant 1$ 的整数, 取函数 $z^{n-1}e^{-z}$ 沿与上面 (习题 23 中) 相类似的围线积分, 但适当选取在原点的角, 由此证明下列关系式:

$$\int_0^{\infty}x^{n-1}e^{-px}\cos qx\,dx=\frac{(n-1)!\mathrm{Re}(p+iq)^n}{(p^2+q^2)^n},$$

$$\int_0^{\infty}x^{n-1}e^{-px}\sin qx\,dx=\frac{(n-1)!\mathrm{Im}(p+iq)^n}{(p^2+q^2)^n}.$$

(回忆 $\int_0^{\infty}x^{n-1}e^{-x}dx=(n-1)!$.)

25. (i) 证明: 函数 $\pi\mathrm{ctg}\,\pi z$ 在整个复平面亚纯, 它在点 $z=n(n\in\mathbf{Z})$ 有单极点; 并且无论 n 是什么, 它在极点 $z=n$ 处的留数等于 1.

设

$$f(z)=P(z)/Q(z)$$

是有理分式, 而且 $\deg Q>\deg P+1$; 设 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 是它的极点, $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 是相应的留数. 还假定对于 $1\leqslant q\leqslant m$, a_q 不是整数. 用 γ_n 表示以 $\pm\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\pm\left(n+\dfrac{1}{2}\right)i$ 为顶点的正方形的边界, 这里 n 是正整数. 证明存在着两个与 n 无关的正实数 M_1 及 K, 使得

a) 在 γ_n 上, $|\pi\,\mathrm{ctg}\,\pi z|\leqslant M_1$;

b) 对于充分大的 $|z|$, $|f(z)|\leqslant K/|z|^2$.

由此推出

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\gamma_n}f(z)\pi\,\mathrm{ctg}\,\pi z\,dz=0$$

以及

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{-n\leqslant p\leqslant n}f(p)=-\sum_{1\leqslant q\leqslant m}b_q\pi\,\mathrm{ctg}\,\pi a_q. \tag{1}$$

(注意: 由 b) 可推出 $\lim\limits_{n,n'\to+\infty}\sum\limits_{-n\leqslant p\leqslant n'}f(p)$ 存在, 因而 (1) 的左边可用 $\sum\limits_{-\infty<p<+\infty}f(p)$ 来代替.)

例 $\sum\limits_{n\geqslant 1}1/(a+bn^2)$, $\sum\limits_{n\geqslant 1}n^2(n^4+a^4)$($a,b$ 为正实数).

(ii) 证明: 即令我们只有 $\deg Q>\deg P$, (i) 中结论仍然成立. (首先证明, 可以写出 $f(z)=g(z)+c/z$, 其中 c 是常数, $g(z)$ 是满足 (i) 中条件的有理分式. 然后证明 $\int_{\gamma_n}\dfrac{\mathrm{ctg}\pi z}{z}dz=0$ (在两对边上所取积分消去了). 注意: 这时一般地 $\lim\limits_{n,n'\to+\infty}\sum\limits_{-n\leqslant p\leqslant n'}f(p)$ 不存在.)

例　计算 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{-n\leqslant p\leqslant n}\frac{1}{x-p}$, 由此导出 $\sum\limits_{p\geqslant 1}\frac{1}{x^2-p^2}$ 的值, 其中 x 不是整数.

(iii) 设 α 是满足 $-\pi<\alpha<\pi$ 的实数. 证明:

(c) 存在着与 n 无关的正实数 M_2, 使得在 γ_n 上,

$$\left|\frac{e^{i\alpha z}}{\sin\pi z}\right|\leqslant M_2,$$

(d)

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\gamma_n}\frac{e^{i\alpha z}}{z\sin\pi z}dz=0.$$

(注意, 可写出

$$\int_{\gamma_n}\frac{e^{i\alpha z}}{z\sin\pi z}dz=2i\int_{\gamma_n'}\frac{\sin\alpha z}{z\sin\pi z}dz+2i\int_{\gamma_n''}\frac{\sin\alpha z}{z\sin\pi z}dz,$$

其中 γ_n' (或 γ_n'') 表示直线段 $z=n+\frac{1}{2}+iy, |y|\leqslant n+\frac{1}{2}$ $\left(\text{或 } z=x+i\left(n+\frac{1}{2}\right),\right.$ $\left.|x|\leqslant n+\frac{1}{2}\right)$, 然后应用第一章习题 14.) 最后由此推出: 如果 $f(z)$ 是满足 (ii) 中条件的有理分式, 我们有

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{-n\leqslant p\leqslant n}(-1)^p f(p)e^{i\alpha p}=-\pi\sum_{1\leqslant q\leqslant m}b_q\frac{e^{i\alpha a_q}}{\sin\pi a_q}.$$

例　取 $f(z)=1/(x-z)$, 并且证明, 如果 $-\pi<\alpha<\pi$, 我们有: 对于 $x\neq 0,\pm1,\pm2,\cdots$,

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\frac{\cos\alpha n}{x^2-n^2}=\frac{\pi}{2x}\frac{\cos\alpha x}{\sin\pi x}-\frac{1}{2x^2},\\ \displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\frac{n\sin\alpha n}{x^2-n^2}=\frac{\pi}{2}\frac{\sin\alpha x}{\sin\pi x}.\end{cases}$$

第四章　多变量解析函数, 调和函数

§1. 多变量幂级数

为了避免复杂的记号, 下面限于讨论两个变量的情形, 但这样的讨论不难转移到任意有限个变量的情形.

1. 代数 $\boldsymbol{K[[X,Y]]}$

系数在域 K 内的 X 及 Y 的形式幂级数是形如

$$S(X,Y)=\sum_{p,q\geqslant 0}a_{p,q}X^pY^q$$

的表示式, 其中系数 $a_{p,q}$ 属于域 K.

与第一章 §1 中一样, 我们定义两个形式幂级数的加法以及一个形式幂级数与一个纯量的乘法. 这样, 形式幂级数的集 $K[[X,Y]]$ 就有在域 K 上的一个向量空间结构. 再定义两个形式幂级数的积, 于是 $K[[X,Y]]$ 变成一个代数.

定义不恒等于零的**形式幂级数的阶**如下: 它是满足下式的最小整数 n :

$$\sum_{p+q=n}a_{p,q}X^pY^q\neq 0.$$

可以证明: 两非零级数的积的阶等于这两级数的阶的和, 特别, $K[[X,Y]]$ 是一整环.

我们不讲字母 X,Y 的形式幂级数的代入理论, 不过讲这种理论也没有任何特殊困难. 代入的级数的阶必须 $\geqslant 1$. 作为习题, 读者可证明与第一章 §1 中命题 5.1 相类似的一个命题.

2. 多重幂级数的收敛域

此后假定域 K 或是域 $\mathbf{R}$ 或是 $\mathbf{C}$. 与第一章 §2 第 3 段中一样, 相应于每个形式级数

$$\sum_{p,q\geqslant 0} a_{p,q}X^pY^q,$$

取正 (或零) 项级数

$$\sum_{p,q\geqslant 0} |a_{p,q}|(r_1)^p(r_2)^q$$

与之对应. 其中 r_1 及 r_2 表示两个实变量 $\geqslant 0$.

设 Γ 是第一象限 $r_1\geqslant 0, r_2\geqslant 0$ 中满足

$$\sum_{p,q} |a_{p,q}|(r_1)^p(r_2)^q < +\infty$$

的点 (r_1, r_2) 所成的集. 因此对于满足 $|z_1|\leqslant r_1$, $|z_2|\leqslant r_2$ 的任何 (实或复) 数对 z_1 及 z_2, 级数 $\sum\limits_{p,q} a_{p,q}(z_1)^p(z_2)^q$绝对收敛. 集 Γ 不是空的, 因为它显然含原点 $(0,0)$.

定义 Γ 的内点所成的集 Δ 称为级数 $S(X,Y)$ 的**收敛域**.

于是收敛域是开集, 它可能是空集. 事实上, 容易作出 Γ 只含原点的例子.

如果把上列定义应用到一个变量 z 的情形, 可以看出, 收敛域就是圆盘 $|z|<\rho$, 其中 ρ 表示幂级数的收敛半径.

命题 2.1 为了使得 $(r_1, r_2)\in\Delta$, 必须而且只需存在着 $r_1'>r_1$ 及 $r_2'>r_2$, 使得 $(r_1', r_2')\in\Gamma$.

条件是必要的, 因为在与 (r_1, r_2) 充分接近的任何点, 级数

$$\sum_{p,q} |a_{p,q}|(r_1')^p(r_2')^q$$

必然收敛. 条件是充分的, 因为这时 Γ 包含满足 $\rho_1\leqslant r_1'$, $\rho_2\leqslant r_2'$ 的所有的点 (ρ_1, ρ_2), 从而点 (r_1, r_2) 是 Γ 的内点.

特别, 收敛域 Δ 不是空集的必要与充分条件是: 至少有一对正数 (r_1, r_2), 使得

$$\sum_{p,q} |a_{p,q}|(r_1)^p(r_2)^q < +\infty.$$

命题 2.2 如果 (r_1, r_2) 属于收敛域, 那么对于 $|z_1|\leqslant r_1$, $|z_2|\leqslant r_2$, 级数 $S(z_1, z_2)$ 正规收敛. 如果 $(|z_1|, |z_2|)$ 不属于 Γ 的闭包, 级数 $S(z_1, z_2)$ 发散.

与单变量级数情形一样, 证明这一命题, 要用下列阿贝尔引理:

引理 如果 $|a_{p,q}|(r_1')^p(r_2')^q \leqslant M$ (M 与 p 及 q 无关), 并且如果 $r_1 < r_1', r_2 < r_2'$, 那么对于 $|z_1| \leqslant r_1, |z_2| \leqslant r_2$, 级数

$$\sum_{p,q} a_{p,q}(z_1)^p(z_2)^q$$

正规收敛.

把这级数各项的绝对值用一个二重几何级数的各项来控制, 就容易证明上列引理. 我们让读者从阿贝尔引理推出命题 2.2.

不太严密地说, 我们也称使得 $(|z_1|, |z_2|)$ 属于收敛区域 Δ 的数对 (z_1, z_2) 的集合为 "收敛域". 同样, 对单复变量 z, 其收敛域是开圆盘 $|z| < \rho$, ρ 表示收敛半径.

3. 收敛幂级数的运算

命题 3.1 (幂级数的加法及乘法) 设开集 D 含在级数 $A(X, Y)$ 的收敛域以及级数 $B(X, Y)$ 的收敛域内. 那么 D 含在下列级数中每一个的收敛域内:

$$S(X, Y) = A(X, Y) + B(X, Y),$$
$$P(X, Y) = A(X, Y) \cdot B(X, Y).$$

此外, 如果 $(|z_1|, |z_2|) \in D$, 我们有

$$S(z_1, z_2) = A(z_1, z_2) + B(z_1, z_2),$$
$$P(z_1, z_2) = A(z_1, z_2) \cdot B(z_1, z_2).$$

证明与单变量情形相似.

现以显然的方式给出幂级数 $S(X, Y) = \sum\limits_{p,q} a_{p,q} X^p Y^q$的偏导数的定义:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial X} = \sum\limits_{p,q} p a_{p,q} X^{p-1} Y^q, \\ \dfrac{\partial S}{\partial Y} = \sum\limits_{p,q} q a_{p,q} X^p Y^{q-1}. \end{cases}$$

命题 3.2 级数 $\dfrac{\partial S}{\partial X}$ 与级数 S 有相同的收敛域, 当 $(|z_1|, |z_2|)$ 在这域内时, 函数 $\dfrac{\partial S}{\partial X}(z_1, z_2)$ 是函数 $S(z_1,\ z_2)$ (关于实或复变量 z_1) 的偏导数.

证明仿照第一章 §2 命题 7.1 的证明.

利用逐次导数, 可证明公式

$$a_{p,q} = \frac{1}{p!q!} \frac{\partial^{p+q} S(0, 0)}{\partial z_1^p \partial z_2^q}. \tag{3.1}$$

§2. 解析函数

这里考虑在开集 D 内确定的多实变或多复变函数. 为了简单起见, 现对两个变量的函数情形进行讨论.

1. 可展开成幂级数的函数

定义 设 $f(x,y)$ 是在点 (x_0,y_0) 的邻域内确定的函数, $S(X,Y)$ 是一形式幂级数. 如果 $S(X,Y)$ 的收敛域不空, 并且对于充分小的 $|x-x_0|$ 及 $|y-y_0|$, 有

$$f(x,y)=S(x-x_0,\ y-y_0),$$

那么我们说 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) **可展开成幂级数**.

如果幂级数 S 存在, 那么由 §1 公式 (3.1), 它是唯一的. 像第一章 §4 中那样讨论, 可证明下列性质: 如果 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可展开成幂级数, 函数 f 在点 (x_0,y_0) 的邻域内无限可微. 设 f 及 g 是在点 (x_0,y_0) 可展开成幂级数的两个函数, 那么它们的乘积在点 (x_0,y_0) 可展开成幂级数. 如果这乘积在 (x_0,y_0) 的一个邻域内恒等于零, 那么函数 f 及 g 中至少有一个在 (x_0,y_0) 的邻域内恒等于零.

2. 解析函数, 解析函数的运算

定义 设实值或复值函数 $f(x,y)$ 在开集 D 内确定. 如果对于任何点 $(x_0,y_0)\in D$, 函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可展开成幂级数, 那么我们说函数 $f(x,y)$ 在 D 内**解析**.

现叙述下列性质, 但不作证明: 开集 D 内的解析函数形成一个环, 而且形成一个代数. 如果 $f(x,y)$ 在 D 内解析, 在满足 $f(x_0,y_0)\neq 0$ 的任何点 $(x_0,y_0)\in D$, $\dfrac{1}{f(x,y)}$ 解析.

在 D 内的任何解析函数无限可微, 而且它们的导数是 D 内的解析函数. 两个解析函数的复合函数是解析的. 准确地说, 如果 $f(x,y,z)$ 在 D 内解析, 并且如果 $g_1(u,v),g_2(u,v),g_3(u,v)$ 在开集 D' 内解析, 并在 D 内取值, 那么复合函数 $f(g_1(u,v),g_2(u,v),g_3(u,v))$ 在 D' 内解析.

命题 2.1 *多重幂级数的和是其变量在收敛域内的解析函数.*

证明与第一章 §4 命题 2.1 的证明相仿. 请读者叙述与该节命题 2.2 相仿的一个命题.

3. 解析开拓原理

定理 *设 $f(x,y)$ 是在连通开集 D 内解析的函数, 又设 $(x_0,y_0)\in D$. 下列各条件是等价的:*

a) *f 及其各阶导数在点 (x_0,y_0) 为零;*

b) f 在 (x_0, y_0) 的一个邻域内恒等于零;

c) f 在 D 内恒等于零.

证明仿照第一章 §4 第 3 段中定理的证明作出.

系 1 在连通开集 D 内解析函数的环是整环.

系 2 (解析开拓原理) 如果在连通开集 D 内解析的两函数 f 及 g 在 D 内一点的邻域内相等, 那么它们在 D 内恒等.

§3. 两个实变量的调和函数

1. 调和函数的定义

定义 设两个实变量 x 及 y 的函数 $f(x, y)$ 在开集 D 内确定. 如果这函数在 D 内两次连续可微并且满足条件

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \tag{1.1}$$

那么我们说它在 D 内是**调和的**. 微分算子 $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ 称为拉普拉斯算子, 通常记作 Δ.

可以同样定义任意有限个实变量的调和函数, 但下面讲的只适用于两个变量的情形.

引进对复变量 $z = x + iy$ 及共轭变量 $\overline{z} = x - iy$ 的微分运算 $\dfrac{\partial}{\partial z}$ 及 $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}$ (参看第二章 §2 第 3 段). 我们有

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}}, \tag{1.2}$$

从而条件 (1.1) 等价于下列条件:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}} = 0. \tag{1.3}$$

因此关系式 (1.3) 表明 f 是调和函数.

注意 这里考虑的函数 f 可取复值或实值. 为了使得复值函数 $f = P + iQ$ (P 及 Q 取实值) 是调和的, 由 (1.1), 必须而且只需 P 及 Q 是调和的. 通常用记号 $\mathrm{Re}(f)$ 及 $\mathrm{Im}(f)$ 分别表示 P 及 Q.

2. 调和函数及全纯函数

命题 2.1 任何全纯函数是调和的.

事实上, 如果 f 是全纯的, 它是无限可微的. 而且我们有 $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$, 取导数 $\dfrac{\partial}{\partial z}$, 就得到关系式 (1.3).

系 全纯函数的实部及虚部是调和函数.

例如在除去原点的整个平面内, $\log|z|$ 是调和函数. 事实上, 在每点 $z \neq 0$ 的邻域内, $\log z$ 具有分支, 并且 $\log|z|$ 是这种分支的实部.

命题 2.2 设 $g(x,y)$ 是在开集 D 内调和的任一实函数, 那么在 D 中每点的邻域内, $g(x,y)$ 是在这点的邻域内一个全纯函数 f 的实部, 而且除去相差一个常数外, f 是确定的.

证明 因为 g 是调和的, 所以我们有 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$, 从而 $\dfrac{\partial g}{\partial z}$ 在 D 内全纯. 因此微分形式 $2\dfrac{\partial g}{\partial z}dz$ 在局部有原函数 f 换句话说, 在 D 中每点的邻域内, 存在着函数 f (除去相差一个常数外是确定的), 使得

$$df = 2\frac{\partial g}{\partial z}dz. \tag{2.1}$$

由这一关系式可证明 f 是全纯的. 在关系式 (2.1) 中取共轭复数, 得

$$d\bar{f} = 2\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}d\bar{z}. \tag{2.2}$$

这是由于 g 是实的, 函数 $\dfrac{\partial g}{\partial z}$ 及 $\dfrac{\partial g}{\partial \bar{z}}$ 共轭. 把 (2.1) 及 (2.2) 相加, 得

$$\frac{1}{2}d(f+\bar{f}) = dg,$$

因此 g 等于 f 的实部, 可能差一实常数.

还只需证明: 如果在同一点的邻域内全纯的两函数 f_1 及 f_2 有相同的实部, 那么它们的差 $f = f_1 - f_2$ 是常数. 事实上我们有 $d(f+\bar{f}) = 0$, 亦即

$$\frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}d\bar{z} = 0.$$

由此得 $\dfrac{\partial f}{\partial z} = 0$, $\dfrac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} = 0$, 证完.

注意 已给在开集 D 内的一个实调和函数 g, 不一定总存在着在整个 D 内全纯的一个函数 f, 其实部等于 g. 例如, 当 D 是除去原点的平面, $\log|z|$ 就不是在 D 内全纯的一个函数的实部. 这是由于 z 的对数在 D 内没有单值分支. 命题 2.2 只说明: 任何实调和函数在局部是一全纯函数的实部.

系 如果 D 是单连通开集, 任何在 D 内的实调和函数 g 是一个在 D 内的全纯函数 f 的实部.

事实上, 微分形式 $2\frac{\partial g}{\partial z}dz$ 在 D 内有原函数 (参看第二章 §1 第 7 段定理 3).

3. 平均性质

在第三章 §2 第 1 段中, 我们已经看到, 在开集 D 内全纯的任何函数 f 有平均性质: 对于含在 D 内的任何闭圆盘, f 在圆盘中心的值等于 f 在圆盘边界上的值的平均.

命题 3.1 *在 D 内调和的任何函数有平均性质.*

只需对实值调和函数作出证明. 事实上, 复值调和函数情形可通过分出实部及虚部化为实值情形.

设 g 是在 D 内的实值调和函数, 又设 S 是含在 D 内的闭圆盘. 由命题 2.2 的系, 存在着在 S 的邻域内全纯的函数 f, 其实部为 g. f 在 S 的中心的值等于 f 在圆盘边界上的平均值. 取实部, 可见 g 在 S 的中心的值等于它在边界上的平均值. 证完.

以后 (§4 第 4 段) 我们将要看到相反的情形: 有平均性质的任何连续函数是调和的. 换句话说, 平均性质可刻画调和函数.

在第三章 §2 第 2 段, 对于所有有平均性质的 (实值或复值) 连续函数, 我们证明了最大模原理. 因此最大模原理适用于调和函数.

4. 调和函数的解析性

命题 4.1 *在平面上开集 D 内调和的任何函数 $g(x,y)$ 是在 D 内的实变量 x 及 y 的解析函数. 特别, 任何调和函数无限可微.*

证明 可假定 g 取实值. 由于问题的局部性 (因为要证明 g 在 D 内每一点的邻域内解析), 我们将假定 $g(x,y)$ 在开圆盘 $x^2+y^2<\rho^2$ 内调和. 在这圆盘内, g 是一个全纯函数 f 的实部, f 可展开成幂级数

$$f(z)=\sum_{n\geqslant 0}a_nz^n. \tag{4.1}$$

在这级数中, 用 $x+iy$ 代替 z, 并且考虑级数

$$\sum_{n\geqslant 0}a_n(x+iy)^n. \tag{4.2}$$

在 (4.2) 中, 把 $(x+iy)^n$ 用展式

$$(x+iy)^n=\sum_{p+q=n}\frac{n!}{p!q!}x^p(iy)^q \tag{4.3}$$

来代替, 于是 (4.2) 就成为两个变量 x 及 y 的幂级数.

满足 $|x|+|y|<\rho$ 的所有点 (x,y) 属于二重级数 (4.2) 的收敛区域. 事实上, 对于一个这样的点 (x,y), 存在着 $r_1>|x|$ 及 $r_2>|y|$, 使得

$$r_1+r_2=r<\rho,$$

于是我们有

$$\sum_{p\geqslant 0,q\geqslant 0}\frac{(p+q)!}{p!q!}|a_{p+q}|(r_1)^p(r_2)^q=\sum_{n\geqslant 0}|a_n|r^n<+\infty.$$

特别, 级数 (4.2) 的和是在圆盘

$$|x|<\frac{\rho}{2},\quad |y|<\frac{\rho}{2} \tag{4.4}$$

的积内解析的函数.

设 $\overline{f}(z)=\sum\limits_{n\geqslant 0}\overline{a}_nz^n$ 是幂级数的和, 其系数 $\overline{a}_n$ 是级数 $f(z)$ 的系数的共轭. 我们有

$$2g(x,y)=f(x+iy)+\overline{f}(x-iy). \tag{4.5}$$

根据以上同样的理由, 函数 $\overline{f}(x-iy)$ 在开集 (4.4) 内解析. 因此 $g(x,y)$ 是在这开集内解析的函数. 这样, 设函数 g 在一开圆盘的中心之邻域内为调和, 则 g 在该处是解析的. 由此可推出命题 4.1.

5. 求实部已知的全纯函数

我们已经看到 (命题 2.2), 任何实调和函数 g 在局部是一全纯函数 f 的实部, 而 f 可用积分求出. 现在将要看到, 当 g (它是解析的) 是由幂级数展式给出时, 可不用积分求得 f.

又假设 $g(x,y)$ 在开圆盘 $x^2+y^2<\rho^2$ 内调和, 并且采用第 4 段中的记号.

考虑两个变量 X 及 Y 的两个形式幂级数:

$$f(X+iY)=\sum_{n\geqslant 0}a_n(X+iY)^n,$$

$$\overline{f}(X-iY)=\sum_{n\geqslant 0}\overline{a}_n(X-iY)^n.$$

我们刚刚看到, 它们的收敛域包含开集 (4.4). 如果复数 x 及 y 满足 (4.4), 用它们代替 X 及 Y, 于是得到绝对收敛级数.

设 z 是满足 $|z|<\rho$ 的复数. 由 (4.5), 我们有

$$2g\left(\frac{z}{2},\frac{z}{2i}\right)=f(z)+\overline{f}(0). \tag{5.1}$$

在这关系式中用 0 代替 z, 得

$$2g(0,0)=f(0)+\overline{f}(0).$$

最后由求差得

$$2g\left(\frac{z}{2},\frac{z}{2i}\right)-g(0,0)=f(z)+\frac{1}{2}\left(\overline{f}(0)-f(0)\right). \tag{5.2}$$

因此除了可能相差一纯虚常数外, 所求函数 $f(z)$ 等于已知函数

$$2g\left(\frac{z}{2},\frac{z}{2i}\right)-g(0,0). \tag{5.3}$$

在两个实变量 x 及 y 的函数 $g(x,y)$ 的二重幂级数展式中, 代入复变量, 就得到上列函数.

注意 在上面, 我们假定过函数 $g(x,y)$ 在圆盘 $x^2+y^2<\rho^2$ 内调和. 但是对于在开集 (4.4) 内可展开为幂级数的任何实解析函数 $g(x,y)$, 关系式 (5.2) 仍有意义. 它确定的函数 $f(z)$ 在 $|z|<\rho$ 内可展开成幂级数, 因而在这圆盘内全纯. 可是还不确切知道 g 是全纯函数 (5.3) 的实部. 作为练习, 可以证明: 要使得 g 是 (5.3) 的实部, 必须而且只需 g 是调和的.

例 考虑函数

$$g(x,y)=\frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x+\operatorname{sh}^2 y}.$$

我们有

$$2g\left(\frac{z}{2},\frac{z}{2i}\right)=\frac{2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}}{\cos^2\frac{z}{2}-\sin^2\frac{z}{2}}=\operatorname{tg} z,$$

从而

$$f(z)=\operatorname{tg} z.$$

可以证明, g 恰好是 $\operatorname{tg} z$ 的实部, 因此已给函数 g 是调和的, 它是 $\operatorname{tg} z$ 的实部.

§4. 泊松公式, 狄利克雷问题

1. 在圆盘内调和函数的积分表示

设 $g(x,y)$ 是在圆盘 $x^2+y^2<\rho^2$ 内的实调和函数, g 是全纯函数

$$f(z)=\sum_{n\geqslant 0}a_n z^n \tag{1.1}$$

的实部, 并且可假定 a_0 是实数, 这样就确定了函数 f.

对于 $r<\rho$, 我们有

$$g(r\cos\theta,r\sin\theta)=a_0+\frac{1}{2}\sum_{n\geqslant 1}r^n(a_n e^{in\theta}+\overline{a}_n e^{-in\theta}), \tag{1.2}$$

在这里, 对于从 0 变到 2π 的 θ, 收敛性是正规的. 在 (1.2) 的右边, 有一个傅里叶级数展式, 其系数由下列积分公式给出:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(r\cos\theta,\ r\sin\theta)d\theta, \tag{1.3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{g(r\cos\theta,\ r\sin\theta)}{(re^{i\theta})^n}d\theta, \quad 对于\ n \geqslant 1. \tag{1.4}$$

把 (1.1) 的右边的系数 a_n 用 (1.3) 及 (1.4) 中给出的它们的值来代替. 由于正规收敛性, 可交换求和及求积分的次序, 于是, 对于 $|z| < r$, 我们得到

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\left[1 + 2\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{z}{re^{i\theta}}\right)^n\right]d\theta. \tag{1.5}$$

但

$$1 + 2\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{z}{re^{i\theta}}\right)^n = \frac{re^{i\theta}+z}{re^{i\theta}-z},$$

最后得到对于 $|z| < r$ 成立的公式:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\frac{re^{i\theta}+z}{re^{i\theta}-z}d\theta. \tag{1.6}$$

设 $f(z)$ 是在圆盘 $|z| < r$ 内的全纯函数. 上列积分公式把 $f(z)$ 用它的实部在圆盘边界上的值来表示.

在 (1.6) 中, 取两边的实部, 得

$$g(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\frac{r^2-|z|^2}{|re^{i\theta}-z|^2}d\theta, \tag{1.7}$$

其中 $z = x + iy$.

无论 g 是在圆盘 $x^2+y^2 < \rho^2$ 内的任何调和函数, 上列公式在开圆盘 $x^2+y^2 < r^2$ 内成立, 其中 $r < \rho$. 实际上, 公式 (1.7) 对于复值调和函数 g 也成立. 分开实部和虚部就可看出这一点. 关系式 (1.7) 称为**泊松公式**, 积分号下的函数 $\dfrac{r^2-|z|^2}{|re^{i\theta}-z|^2}$ 称为**泊松核**.

2. 泊松核的性质

固定 r 及 θ, 于是泊松核是 $z = x + iy$ 的函数. 除去在点 $z = re^{i\theta}$ 外, 这函数在任何点有定义并且调和. 它的调和性可由它是全纯函数 $\dfrac{re^{i\theta}+z}{re^{i\theta}-z}$ 的实部推出. 在圆 $|z| = r$ 上除去点 $z = re^{i\theta}$ 以外的任何点, 泊松核为零. 在开圆盘 $|z| < r$ 内, 它大于零.

现固定 r 及 z, 这里 $|z| < r$, 于是泊松核是 θ 的周期函数, 并且取严格正值. 如果把 θ 的这一函数看作单位圆上正的质量分布的密度, 那么这分布的总质量等于 $+1$. 根据关系式

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r^2-|z|^2}{|re^{i\theta}-z|^2}d\theta = 1 \tag{2.1}$$

就可看出这一点. 而关系式 (2.1) 可从 (1.7) 中取 g 为常数 1 (这样的 g 是调和的) 得出.

3. 圆盘的狄利克雷问题

这一狄利克雷问题可叙述如下: 周期为 2π 的连续函数 $f(\theta)$ 是在心为 O, 半径为 r 的圆上的连续函数. 我们要求复变量 z 的函数 $F(z)$, 使其在闭圆盘 $|z| \leqslant r$ 上确定且连续, 在开圆盘 $|z| < r$ 内调和, 并且满足

$$F(re^{i\theta}) = f(\theta).$$

换句话说, 这就是要把在圆上给出的连续函数, 开拓成为在闭圆盘上连续、在开圆盘内调和的函数.

我们限于考虑已给函数 f 及未知函数 F 取实值的情形, 复值函数情形可由分离实部及虚部化为实值函数情形.

定理 圆盘的狄利克雷问题有解, 并且只有一个解.

先证明: 如果解存在, 它是唯一的. 如果 F_1 及 F_2 是问题的两个解, 那么差 $F_1 - F_2 = G$ 在闭圆盘上连续, 在开圆盘内调和, 并且在圆盘的边界上为零. 因此只需证明:

引理 如果函数 G 在一闭圆盘上确定且连续, 在除去边界的开圆盘内调和, 并且在圆盘的边界上为零, 那么 G 恒等于零.

事实上, 闭圆盘是紧的. 在闭圆盘中一点, G 达到它的上确界 M. 如果 $M > 0$, 这点应在圆盘内部. 由最大模原理 (参看第三章 §2), 在整个开圆盘内, 从而根据连续性, 也在闭圆盘上, G 应为常数 M. 这与 G 在边界上为零的假设相矛盾. 根据同样的理由, G 在闭圆盘上的下确界为零. 因此 G 恒等于零.

下段中将证明狄利克雷问题有解.

4. 圆盘的狄利克雷问题的解

对于 $|z| < r$, 令

$$F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\frac{r^2-|z|^2}{|re^{i\theta}-z|^2}d\theta. \tag{4.1}$$

要证明这样确定的 F 是调和的, 并且我们有

$$f(\theta_0) = \lim_{\substack{z \to re^{i\theta_0} \\ |z|<r}} F(z). \tag{4.2}$$

于是由圆盘边界上的函数 f 开拓而得的函数 F 是狄利克雷问题的解. 这样就可证明第 3 段中的定理.

由关系式 (4.1) 在圆盘内部所确定的函数 F 显然是

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\frac{re^{i\theta}+z}{re^{i\theta}-z}d\theta$$

的实部. 根据积分号下微分法, 上列函数在开圆盘内是 z 的全纯函数. 因此 F 在开圆盘内正好是调和函数.

还只要证明关系式 (4.2). 证明的想法是这样的: 泊松核确定正质量 ε_z 的一种分布, 其总质量为 1. 这种分布与以 r 为半径的圆盘内的点 z 有关. 我们要证明: 当 z 趋近于一点 $re^{i\theta_0}$ 时, 这种质量分布趋近于把质量 1 放在点 $re^{i\theta_0}$ 所形成的分布. 准确地说, 如果在以 r 为半径的圆上给出含点 $re^{i\theta_0}$ 的弧 $|\theta-\theta_0|<\eta$, 当点 z 趋近于 $re^{i\theta_0}$ 时, 这段弧所带有的分布 ε_z 的总质量趋近于 1. 这就是要证明: 当 z 从圆盘内部趋近于点 $re^{i\theta_0}$ 时, 圆上的余弧所带有的分布 ε_z 的总质量趋近于 0. 因此要证明:

引理 当 z 趋近于 $re^{i\theta_0}$ 而保持模 $<r$ 时, 下列积分趋近于 0:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|\theta-\theta_0|>\eta}\frac{r^2-|z|^2}{|re^{i\theta}-z|^2}d\theta. \tag{4.3}$$

证明 令 $z=\rho e^{i\alpha}$. 如果 $|\alpha-\theta_0|\leqslant\dfrac{\eta}{2}$, 我们有: 对于满足 $|\theta-\theta_0|>\eta$ 的任何 θ,

$$|\alpha-\theta|\geqslant\frac{\eta}{2}.$$

因此在积分号下, 我们有

$$|re^{i\theta}-z|\geqslant r\sin\frac{\eta}{2},$$

从而积分 (4.3) 不超过 $\dfrac{1}{r^2\sin^2\frac{\eta}{2}}(r^2-\rho^2)$. 这式当 ρ 趋近于 r 时正好趋近于 0.

现已证明了引理. 于是可证明关系式 (4.2). 由 (2.1), 我们有

$$\begin{aligned}F(z)-f(\theta_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{|\theta-\theta_0|\leqslant\eta}(f(\theta)-f(\theta_0))\frac{r^2-|z|^2}{|re^{i\theta}-z|^2}d\theta \\ &\quad+\frac{1}{2\pi}\int_{|\theta-\theta_0|>\eta}(f(\theta)-f(\theta_0))\frac{r^2-|z|^2}{|re^{i\theta}-z|^2}d\theta.\end{aligned} \tag{4.4}$$

已给 $\varepsilon>0$. (4.4) 右边的第一个积分的绝对值, 不超过 $|f(\theta)-f(\theta_0)|$ 在 $|\theta-\theta_0|\leqslant\eta$ 时的上确界. 这是由于正分布 ε_z 的总质量等于 1. 因为 f 是连续的, 所以可选取 η,

使得第一个积分的绝对值 $\leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. 这样选取了 η 后, 可取 $2Mm$ 作为 (4.4) 右边第二个积分的绝对值的上界, 这里 M 表示 $|f(\theta)|$ 的一个上界, m 表示积分 (4.3) 的值. 由上一引理, 当 z 趋近于 $re^{i\theta_0}$ 时, m 趋近于 0. 因此只要 z 充分靠近 $re^{i\theta_0}$, 第二个积分的绝对值就要 $\leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. 于是我们有

$$|F(z) - f(\theta_0)| \leqslant \varepsilon,$$

(4.2) 得证.

这样就完全证明了第 3 段中的定理, 公式 (4.1) 表示狄利克雷问题的解.

5. 用平均性质刻画调和函数

我们已经看到 (§3 第 3 段), 任何调和函数有平均性质. 逆定理也是正确的:

定理 *在开集 D 内连续且有平均性质的任何函数 f, 是在 D 内调和的函数.*

证明 只需证明 f 在 D 中每点的邻域内调和. 为此特证明: 如果 K 是含在 D 内的闭圆盘, f 在 K 的内部调和. 考虑 f 在圆盘边界上的限制, 由第 3 段中的定理, 存在函数 F 在 K 上连续, 在 K 的内部调和, 而在 K 的边界上等于 f. 差 $F - f$ 在 K 的边界上为零, 并且由于有平均性质, 在 K 的内部满足最大模原理. 由这一原理 (参看第 3 段中的引理), $F - f$ 在 K 上恒等于零. 因此在 K 的内部, f 与调和函数 F 恒等, 从而 f 在 K 的内部调和.

§5. 多复变量全纯函数

1. 全纯函数的定义

考虑 n 个复变量 $z_k = x_k + iy_k (1 \leqslant k \leqslant n)$. 与第二章 §2 第 3 段中一样讨论, 可以看出, 连续可微函数 f 的微分可写成下列形状:

$$df = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial z_k} dz_k + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_k} d\overline{z}_k \right). \tag{1.1}$$

固定变量 z_k 以外的所有变量, 要使得部分函数 (function partielle) 是 z_k 的全纯函数, 必须而且只需 $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}_k} = 0$. 如果对于变量 z_k 中的每一个都是这样, 那么微分 df 是 dz_k 的线性组合. 反之, 如果 df 是 dz_k 的线性组合, 函数 f 分别对于每个变量 z_k 全纯.

定义 设函数 $f(z_1 \cdots, z_n)$ 在 n 个变量 z_k 的空间 $\mathbf{C}^n$ 中的开集 D 内确定. 如果这函数连续可微, 并且如果它的微分 df 还等于

$$\sum_k \frac{\partial f}{\partial z_k} dz_k,$$

那么称这函数在 D 内**全纯**.

显然, 复变量 z_k 的解析函数是全纯的.

定理 *在开集 D 内连续, 并且对每个复变量 z_k 分别为全纯的函数, 不但在 D 内全纯, 而且还在 D 内解析.*

这定理将在下面两段中证明. 由此特别可推出, 任何连续, 并且对每个变量 z_k 分别为全纯的函数, 是连续可微的, 而且甚至于是无限可微的. 另一方面还可推出, 对于多复变量函数, 全纯概念与解析概念是等价的.

2. 柯西积分公式

首先考虑两个复变量 z_1 及 z_2 的情形.

命题 2.1 *如果 $f(z_1, z_2)$ 在圆盘*

$$|z_1| < \rho_1, |z_2| < \rho_2 \tag{2.1}$$

的乘积内连续, 并且在 (2.1) 内, 对 z_1 及 z_2 分别全纯, 那么当

$$|z_k| < r_k < \rho_k \quad (k = 1, 2)$$

时, 我们有

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint \frac{f(\zeta_1, \zeta_2) d\zeta_1 d\zeta_2}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)}, \tag{2.2}$$

这里重积分是在圆 $|\zeta_1| = r_1$ 及 $|\zeta_2| = r_2$ 的乘积上取的, 对每个圆是按正向取的.

证明 在开圆盘 $|z_2| < r_2$ 内取定 z_2. 函数 $f(z_1, z_2)$ 在圆盘 $|z_1| < \rho_1$ 内对 z_1 全纯. 因此可应用柯西公式 (第二章 §2 第 5 段) 对于 $|z_1| < r_1$,

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_1| = r_1} \frac{f(\zeta_1, z_2)}{\zeta_1 - z_1} d\zeta_1. \tag{2.3}$$

现取定 ζ_1, 使 $|\zeta_1| = r_1$. 在 $|z_2| < \rho_2$ 内, 函数 $f(\zeta_1, z_2)$ 对 z_2 全纯. 于是同样有: 对于 $|z_2| < r_2$,

$$f(\zeta_1, z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_2| = r_2} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2)}{\zeta_2 - z_2} d\zeta_2. \tag{2.4}$$

在 (2.3) 中积分号下, 把 $f(\zeta_1, z_2)$ 用 (2.4) 中所给出的它的值来代替. 由于函数 $f(\zeta_1, \zeta_2)$ 连续, 我们恰好得到公式 (2.2).

注意 (哈尔托格斯的结果) 设 $f(\overline{z}_1, z_2)$ 是在下列两开集 (其中 $\varepsilon > 0$ 很小) 的并集内有定义并且连续的函数:

$$|z_1| < \rho_1, \quad |z_2| < \varepsilon, \tag{A}$$

$$\rho_1 - \varepsilon < |z_1| < \rho_1, \quad |z_2| < \rho_2. \tag{B}$$

假定: 在 (A) 内, f 是 z_1 的全纯函数; 在 (B) 内, f 是 z_2 的全纯函数. 那么 f 可开拓成为在开集 (2.1) 内变量 z_1 及 z_2 的全纯函数, 并且开拓而得的函数满足积分公式 (2.2).

证明提示 任意选择正数 r_1 及 r_2, 使得 $r_1 < \rho_1$, $r_2 < \rho_2$. 可假定 ε 充分小, 使得 $\varepsilon < r_2$, $r_1 > \rho_1 - \varepsilon$. 要证明 f 可开拓成一函数, 仍然记作 $f(z_1, z_2)$. 这函数在开集

$$|z_1| < r_1, \quad |z_2| < r_2 \tag{2.5}$$

内全纯, 并且在这开集内满足 (2.2). 首先, 因为 f 在 (A) 内对 z_1 全纯, 所以关系式 (2.3) 对于 $|z_1| < r_1, |z_2| < \varepsilon$ 成立. 其次, 因为 f 在 (B) 内对 z_2 全纯, 所以如果 $|\zeta_1| = r_1$, 关系式 (2.4) 对于 $|z_2| < r_2$ 成立. 于是 (2.2) 对于 $|z_1| < r_1, |z_2| < \varepsilon$ 成立, 可是 (2.2) 的右边在 (2.5) 内是 z_1 及 z_2 的全纯函数, 如果把这样开拓而得的函数记作 $f(z_1, z_2)$, 它在 (2.5) 内就满足 (2.2). 证完.

对于 n 个复变量的函数, 有一与命题 2.1 类似的命题. 这时积分公式 (2.2) 由下列公式代替:

$$f(z_1 \cdots, z_n) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int \cdots \int \frac{f(\zeta_1, \cdots, \zeta_n) d\zeta_1 \cdots d\zeta_n}{(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_n - z_n)}.$$

3. 全纯函数的级数展式

命题 3.1 在与命题 2.1 同样的假设下, 函数 f 在开集 (2.1) 内可展开为二重幂级数

$$f(z_1, z_2) = \sum_{p,q \geqslant 0} a_{p,q} (z_1)^p (z_2)^q. \tag{3.1}$$

证明与单复变量情形下所作出的相似 (参看第二章 §2 第 6 段定理 3).

我们已经知道, 如果幂级数展式存在, 那么由于它必然是 f 在原点的泰勒展式, 它是唯一的. 因此对满足

$$r_1' < \rho_1, \quad r_2' < \rho_2$$

的 r' 及 r_2', 只需找出在圆盘

$$|z_1| \leqslant r_1', \quad |z_2| \leqslant r_2'$$

的乘积中正规收敛于 $f(z_1, z_2)$ 的一个二重幂级数. 选取 r_1 及 r_2, 使得 $r_1' < r_1 < \rho_1$, $r_2' < r_2 < \rho_2$, 并且对于 $|z_1| \leqslant r_1'$, $|z_2| \leqslant r_2'$, 应用积分公式 (2.2). 我们有

$$\frac{1}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)} = \sum_{p,q \geqslant 0} \frac{(z_1)^p (z_2)^q}{(\zeta_1)^{p+1} (\zeta_2)^{q+1}}, \tag{3.2}$$

并且这级数对于 $|z_i| \leqslant r'_i, |\zeta_i| = r_i (i=1,2)$ 正规收敛. 在 (2.2) 右边积分号下, 代入 (3.2) 中所给出的 $\dfrac{1}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)}$ 的值. 由于正规收敛性, 可以逐项积分, 并且恰好得到 (3.1), 其中系数 $a_{p,q}$ 由下列积分公式给出:

$$a_{p,q} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint \frac{f(\zeta_1, \zeta_2)}{(\zeta_1)^{p+1}(\zeta_2)^{q+1}} d\zeta_1 d\zeta_2. \tag{3.3}$$

命题 3.1 得证.

对于 n 个复变量有类似的命题.

显然, 第 1 段末叙述的定理可由命题 3.1 推出.

注意 可以证明: 在开集 D 内分别对每个变量全纯的函数, 在 D 内连续, 从而全纯. 这结果的证明比较困难, 这里就不作出证明了.

4. 全纯函数泰勒展式的系数的计算

与单变量情形一样, 系数 $a_{p,q}$ 可用含函数 f 的积分表示出来. 为此, 只需在关系式 (3.1) 中把 z_1 用 $r_1 e^{i\theta_1}$ 来代替, 把 z_2 用 $r_2 e^{i\theta_2}$ 来代替, 逐项积分, 得

$$a_{p,q}(r_1)^p (r_2)^q = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r_1 e^{i\theta_1}, r_2 e^{i\theta_2}) e^{-i(p\theta_1 + q\theta_2)} d\theta_1 d\theta_2. \tag{4.1}$$

由此推出柯西不等式

$$|a_{p,q}| \leqslant \frac{M(r_1, r_2)}{(r_1)^p (r_2)^q}, \tag{4.2}$$

其中 $M(r_1, r_2)$ 表示 $|f(z_1, z_2)|$ 对于 $|z_1| = r_1$ 及 $|z_2| = r_2$, 亦即对于 $|z_1| \leqslant r_1$, $|z_2| \leqslant r_2$ 的上确界.

请读者自己叙述与刘维尔定理相似的定理以及最大模原理.

5. 全纯函数的复合

命题 5.1 设 $f(z_1 \cdots, z_n)$ 是 $\mathbf{C}^n$ 中开集 D 内的全纯函数. 设

$$g_1, \cdots, g_n$$

是 $\mathbf{C}^p$ 中开集 D' 内的全纯函数, 并且在 D 内取值. 由

$$(t_1, \cdots, t_p) \longrightarrow f(g_1(t_1, \cdots, t_p), \cdots, g_n(t_1, \cdots, t_p))$$

所定义的函数 $f \circ g$ 是 $t_1, \cdots, t_p$ 在开集 D' 内的全纯函数.

证明 可用幂级数的代入法作出证明. 由于没有在多变量情形下详细说明这一问题, 这里采用原则完全不同的一种方法.

由假设, 既然 f 是全纯的, 我们有

$$df = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_k} dz_k. \tag{5.1}$$

既然函数 g_k 是全纯的, 我们有

$$dz_k = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial g_k}{\partial t_j} dt_j. \tag{5.2}$$

在 (5.1) 中代入由 (5.2) 所给出的微分 dz_k 的值, 我们就得到复合函数 $f \circ g$ 的微分. 于是 $d(f \circ g)$ 是 dt_j 的线性组合, 从而 $f \circ g$ 是 t_j 的全纯函数.

6. 隐函数定理

命题 6.1 设 $f_j(x_1, \cdots, x_n; z_1, \cdots, z_p)(j = 1, \cdots, n)$ 是点 $x_j = a_j, z_k = c_k$ 的邻域内的全纯函数. 假定函数行列式 $\det\left(\frac{\partial f_j}{\partial x'_j}\right)$ 在所考虑的点 $\neq 0$. 那么当 x_j 充分靠近 a_j, z_k 充分靠近 c_k, 而且 y_j 充分靠近 $b_j = f_j(a_1, \cdots, a_n; c_1, \cdots, c_p)$ 时, 方程

$$y_j = f_j(x_1, \cdots, x_n; z_1, \cdots, z_p)(j = 1, \cdots, n) \tag{6.1}$$

可解出如下:

$$x_j = g_j(y_1, \cdots, y_n; z_1, \cdots, z_p), \tag{6.2}$$

其中 g_j 是点 $(b_1, \cdots, b_n; c_1, \cdots, c_p)$ 的邻域内的全纯函数.

证明 我们要转化到关于实变隐函数的经典定理. 令

$$x_j = x'_j + ix''_j, \quad y_j = y'_j + iy''_j,$$

其中 x'_j, x''_j, y'_j 及 y''_j 是实数. 外乘积 $dx_j \wedge d\overline{x}_j$ 等于

$$(dx'_j + idx''_j) \wedge (dx'_j - idx''_j) = -2idx'_j \wedge dx''_j.$$

于是我们有

$$dx_j \wedge d\overline{x}_j = -2idx'_j \wedge dx''_j, \quad \text{且同样 } dy_j \wedge d\overline{y}_j = -2idy'_j \wedge dy''_j. \tag{6.3}$$

而当 $z_1, \cdots, z_p$ 固定时, 我们有

$$dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n = \det\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_{j'}}\right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n,$$
$$d\overline{y}_1 \wedge \cdots \wedge d\overline{y}_n = \det\left(\frac{\partial \overline{f}_j}{\partial \overline{x}_{j'}}\right) d\overline{x}_1 \wedge \cdots \wedge d\overline{x}_n,$$

从而由乘法,

$$dy_1 \wedge d\overline{y}_1 \wedge \cdots \wedge dy_n \wedge d\overline{y}_n = \left|\det\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_{j'}}\right)\right|^2 dx_1 \wedge d\bar{x}_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge d\bar{x}_n.$$

考虑到 (6.3), 这表明 $y_1', y_1'', \cdots, y_n', y_n''$ 关于 $x_1', x_1'', \cdots, x_n', x_n''$ 的函数行列式等于

$$\left|\det\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_{j'}}\right)\right|^2.$$

由假设, 它在点 $(a_1, \cdots, a_n; c_1, \cdots, c_p)$ 不等于 0. 应用隐函数定理: $x_1', x_1'', \cdots, x_n''$ (局部地) 可表示为 $y_1', y_1'', \cdots, y_n''$ 以及 $z_1, \cdots, z_p$ 的实部及虚部的连续可微函数. 而线性方程组

$$dy_j = \sum_{j'} \frac{\partial f_j}{\partial x_{j'}} dx_{j'} + \sum_k \frac{\partial f_j}{\partial z_k} dz_k$$

表明 $dx_{j'}$ 是一些 dy_j 及 dz_k 的线性组合. 因此 $x_1, \cdots, x_n$ 实际上是 y_j 及 z_k 的全纯函数. 证完.

习 题

1. 证明: 如果 $f(z)$ 在开集 D 内全纯, 那么对于任何 $z \in D$, 我们有

$$\Delta|f(z)|^2 = 4|f'(z)|^2, \tag{i}$$

$$\Delta\log(1 + |f(z)|^2) = 4|f'(z)|^2/(1 + |f(z)|^2)^2, \tag{ii}$$

其中 Δ 表示 §3 第 1 段中所定义的拉普拉斯算子.

2. (i) 设 $g(z)$ 是圆盘 $|z| < R$ 内的全纯函数. 证明: 如果 $0 \leqslant r < R$, 并且如果 $g(z)$ 在闭圆盘 $|z| \leqslant r$ 上没有零点, 那么我们有下列关系式

$$\log|g(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|g(re^{i\theta})|d\theta.$$

(ii) 证明积分

$$\int_0^{2\pi} \log|re^{i\theta} - re^{it}|d\theta$$

存在, 并且它的值等于 $2\pi\log r$(r, t 为实数, $r > 0$).

由此推出, 如果 $f(z)$ 是圆盘 $|z| < R$ 内 $\neq 0$ 的亚纯函数, 并且如果 $0 < r < R$, 那么积分 $\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|d\theta$ 收敛.

(iii) 设 $a_1, a_2, \cdots, a_p$ 是 (ii) 中所考虑函数 $f(z)$ 在去心圆盘 $0 < |z| \leqslant r$ 中的零点, $b_1, b_2, \cdots, b_q$ 是它在那里的极点 (每一零点或极点的个数算作与其重数相同), 并且设

$$f(z) = c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \cdots$$

是 f 在原点的洛朗展式 (因而 n 是一整数 $\gtreqless 0$). 证明我们有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|d\theta = \log|c_n| - \sum_{j=1}^{p}\log|a_j| + \sum_{k=1}^{q}\log|b_k| + (n + p - q)\log r.$$

(考虑函数

$$g(z)=f(z)\left(\frac{r}{z}\right)^n\prod_{1\leqslant j\leqslant p}\frac{r^2-\overline{a}_jz}{r(z-a_j)}\prod_{1\leqslant k\leqslant q}\frac{r(z-b_k)}{r^2-\overline{b}_kz},$$

并且证明在包含闭圆盘 $|z|\leqslant r$ 的一开集内, 这函数全纯, 而且没有零点. 还证明: 如果 $|z|=r$, 那么 $|g(z)|=|f(z)|$.)

3. 设本题中所考虑的调和函数都取实值.

(i) 如果 $f(z)$ 在圆盘 $|z|<R$ 内是调和的, 并且如果在这圆盘内, 到处有 $f(z)\geqslant 0$, 证明对于任何 $z(|z|<R)$, 我们有不等式

$$\frac{R-|z|}{R+|z|}f(0)\leqslant f(z)\leqslant\frac{R+|z|}{R-|z|}f(0).$$

(应用泊松公式, 并且注意泊松核满足不等式

$$\frac{r-|z|}{r+|z|}\leqslant\frac{r^2-|z|^2}{|re^{i\theta}-z|^2}\leqslant\frac{r+|z|}{r-|z|}\quad(\text{对于 } |z|<r).)$$

(ii) 由此推出: 如果在心为 a, 半径为 r 的圆盘 $D(a,r)$ 内, $f(z)$ 是调和的, 并且 $\geqslant 0$, 那么对于圆盘 $D(a,r/2)$ 中的任何 z, 我们有

$$\frac{1}{3}f(a)\leqslant f(z)\leqslant 3f(a).$$

(iii) 设 $f(z)$ 是在 $\mathbf{C}$ 平面中一个连通开集 D 内的非负调和函数, 并设 K 是包含于 D 内的一个紧子集. 证明存在着与 D 及 K 与无关的一个常数 M, 使得对 K 中任何两点 z_1 及 z_2, 我们有

$$f(z_1)\leqslant Mf(z_2).$$

(证明存在着满足下列条件的有限个闭圆盘 D_n :

$$D\supset\bigcup_n D_n\supset K,$$

并且对于其中任意两闭圆盘, 例如 D_p 及 D_q, 存在着序列 $D_{n_1},\cdots,D_{n_k}$, 使得 $D_{n_1}=D_p$, $D_{n_k}=D_q$, 并且对于 $j=2,3,\cdots,k, D_{n_{j-1}}\cap D_{n_j}\neq\varnothing$. 然后对这些圆盘中每一个应用 (ii).)

(iv) 设 $\{f_n(z)\}$ 是连通开集 D 内调和函数的 (广义) 单调增序列: 对于任何 $z\in D$ 及 $n=1,2,\cdots$,

$$f_n(z)\leqslant f_{n+1}(z).$$

如果存在着一点 $a\in D$, 使得 $\sup_n|f_n(a)|<\infty$, 证明序列 $\{f_n(z)\}$ 在 D 内任何紧集上一致收敛于一调和函数. (注意序列 $\{f_n(z)\}$ 及级数 $\sum(f_{n+1}(z)-f_n(z))$ 的收敛性等价, 并且应用 (iii).)

4. *次调和函数.* 设 $f(z)$ 是在平面 $\mathbf{C}$ 中开集 D 内有定义的实值连续函数. 如果对于任何 $a\in D$, 我们有: 对于充分小的 $r>0$,

$$f(a)\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(a+re^{i\theta})d\theta,\tag{SH}$$

那么 $f(z)$ 就称为**次调和的.**

(i) 如果 $f(z)$ 在开集 D 内全纯, 证明对于 $p \geqslant 0, |f(z)|^p$ 在 D 内是次调和的.

(ii) 如果 $f_\nu(z)(\nu = 1, 2, \cdots, n)$ 在 D 内是次调和的, 那么下列函数在 D 内也是次调和的:

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu f_\nu(z), a_\nu \geqslant 0; \sup_{1 \leqslant \nu \leqslant n} f_\nu(z).$$

(iii) 如果 D 内次调和函数 $f_n(z)$ 的序列在 D 内任何紧集上一致收敛, 那么极限函数也是次调和的.

(iv) 证明最大模原理适用于次调和函数, 具体地说:

(1) 设 f 在开集 D 内是次调和的. 如果 f 在一点 $a \in D$ 有相对极大值 (亦即对于充分接近 a 的任何 $z, f(z) \leqslant f(a)$), 那么 f 在 a 的邻域内是常数.

(2) 设 D 是平面上一个有界连通开集, 并且设 f 是在 D 内次调和, 在 $\overline{D}$ 上连续的函数. 设 M 是当 z 在 D 的边界上变动时 $f(z)$ 的上确界. 那么

(a) 对于任何 $z \in D, f(z) \leqslant M$;

(b) 如果在一点 $a \in D, f(a) = M$, 那么 f 是常数.

(v) 设 $\varGamma$ 是开集 D 内一个紧集 K 的有向边界. 证明: 如果 u, v 是有连续二阶导数的两个 (实值) 函数, 我们有

$$\iint_K (v\Delta u - u\Delta v)dxdy = \int_\varGamma \left(u\frac{\partial v}{\partial y} - v\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx + \left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right)dy.$$

(应用第二章 §1 第 9 段所引的格林 – 黎曼公式, 先取 $P = -v\dfrac{\partial u}{\partial y}, Q = v\dfrac{\partial u}{\partial x}$, 然后交换 u 及 v.) 由此推出, 如果 $f(z)$ 是在 D 内确定的, 且有连续二阶导数, 并且如果 $a \in D$, 我们有: 对于充分小的 $r > 0$,

$$\iint_{|z-a| \leqslant r} (\Delta f)(z)dxdy = \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial r}(a + re^{i\theta})zd\theta.$$

(在以上的等式中, 令 $u = f, v = 1$.) 由此推出: 对充分小的 $\rho > 0$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\theta})d\theta = f(a) + \int_0^\rho \frac{dr}{2\pi r}\iint_{|z-a| \leqslant r} (\Delta f)(z)dxdy,$$

并且证明对于 $z \in D, \Delta f(z) \geqslant 0$ 是有连续二阶导数的函数 $f(z)$ 在 D 内次调和的必要与充分条件.

例 证明: 如果 $f(z)$ 在开集 D 内全纯, 函数 $\log(1 + |f(z)|^2)$ 在 D 内是次调和的.

5. 设 $f(z)$ 是在圆盘 $|z| < R$ 内的次调和函数. 证明: 如果 $0 < r_1 < R$, 并且如果 $g(z)$ 是圆盘 $|z| \leqslant r_1$ 上满足 $g(r_1 e^{i\theta}) = f(r_1 e^{i\theta})$ 的狄利克雷问题的解, 我们有: 对于 $0 \leqslant r < r_1$,

$$g(re^{i\theta}) \geqslant f(re^{i\theta}).$$

由此推出, 函数

$$m(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})d\theta$$

在 $0 \leqslant r < R$ 中是 r 的连续 (广义) 增函数.

6. 证明: 如果 $f(z)$ 在圆盘 $|z| < R$ 内全纯, 实数 $\alpha > 0$, 那么函数

$$I_\alpha(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^\alpha d\theta$$

在 $0 \leqslant r < R$ 中是连续 (广义) 增函数.

第五章　全纯或亚纯函数序列的收敛性, 级数、无穷乘积, 正规族

在本章中, 我们只考虑单复变函数. 然而以下讨论中有很大一部分可推广到多复变情形.

§1. 空间 $\mathscr{C}(D)$ 的拓扑

1. 在任何紧集上的一致收敛性

设 D 是复平面 $\mathbf{C}$ 上的开集. 我们总是用 $\mathscr{C}(D)$ 表示开集 D 内 (复值) 连续函数的向量空间. 用 $\mathscr{H}(D)$ 表示 D 内全纯函数的向量空间.

定义　设已给函数 $f_n \in \mathscr{C}(D)$ 的一序列. 如果对任何紧集 $K \subset D$, 限制 $f_n \mid K$ 的序列一致收敛, 我们就说函数 f_n 的序列在 D **内任何紧集上一致收敛.**

这定义特别适用于子空间 $\mathscr{H}(D)$ 中函数的情形.

我们知道, 连续函数的一致收敛序列的极限是连续函数. 因此, 如果连续函数 f_n 的序列在 D 中任何紧集上一致收敛, 那么极限函数 f 是这样的: 它在任何紧集 $K \subset D$ 上的限制 $f \mid K$ 连续. 因为 D 中任何点有含在 D 的紧邻域, 所以 f 是连续的.

定义　设函数 $f_n \in \mathscr{C}(D)$. 如果在任何紧集 $K \subset D$ 上, 限制 $f_n \mid K$ 的级数 $\sum\limits_n (f_n \mid K)$ 正规收敛, 那么我们说级数 $\sum\limits_n f_n$**在 D 中任何紧集上正规收敛.** 换句话说, 在任何紧集 $K \subset D$ 上, 已给级数以一正项收敛级数作为控制级数. 显然, 如果一

个级数在 D 内任何紧集上正规收敛, 这级数的部分和在 D 内任何紧集上成为一个一致收敛的序列.

命题 1.1 为了使得函数 $f_n \in \mathscr{C}(D)$ 的序列在 D 内任何紧集上一致收敛, 必须而且只需在任何紧圆盘 $\Sigma \subset D$ 上, 限制 $f_n \mid \Sigma$ 的序列一致收敛. 对于正规收敛级数情形, 也有类似命题.

事实上, 设 K 是含在 D 内的任一紧集. 我们可用含在 D 内的有限个紧圆盘的内部覆盖 K. 由此可立即推得命题.

2. 全纯函数序列收敛性的基本定理

定理 1 如果函数 $f_n \in \mathscr{H}(D)$ 的序列在 D 内任何紧集上一致收敛, 极限函数 f 在 D 内全纯.

证明 我们刚看到 f 在 D 内连续. 为了证明 f 全纯, 由莫勒拉定理 (第二章 §2 第 7 段定理 4), 只需证明微分形式 $f(z)dz$ 是封闭的. 为此, 只需证明, 只要 γ 是含在 D 内的矩形的边界, $\int_\gamma f(z)dz = 0$ (参看第二章 §1 命题 4.1). 而在矩形的边界上, f 是 f_n 的序列的一致极限, 从而我们有

$$\int_\gamma f(z)dz = \lim_n \int_\gamma f_n(z)dz = 0.$$

这就证明了定理 1.

系 在 D 内任何紧集上正规收敛的全纯函数级数的和, 是在 D 内全纯的函数.

定理 2 如果函数 $f_n \in \mathscr{H}(D)$ 的序列在 D 内任何紧集上一致收敛于 $f \in \mathscr{H}(D)$, 那么导数 f_n' 的序列在 D 内任何紧集上一致收敛于导数 f'.

证明 由命题 1.1, 只需证明 f_n' 在含在 D 内的任何紧圆盘上一致收敛于 f'. 设 Σ 是这样一个圆盘, r 是它的半径, 并且取 Σ 的心为原点 0. 存在着 $r_0 > r$, 使得心为 0, 半径为 r_0 的闭圆盘含在 D 内. 于是 f_n 在 $|z| < r_0 + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ 并且充分小) 内全纯, 并且在 $|z| \leqslant r_0$ 上一致收敛于 f.

现证明导数 f_n' 在 $|z| \leqslant r$ 上一致收敛于 f'. 这可由下列引理立即推出:

引理 如果 $g(z)$ 在 $|z| < r_0 + \varepsilon$ 内全纯, 并且如果对于 $|z| \leqslant r_0, |g(z)| \leqslant M$, 那么我们有: 对于 $|z| \leqslant r < r_0$,

$$|g'(z)| \leqslant M \frac{r_0}{(r_0 - r)^2}. \tag{2.1}$$

证明 我们有收敛展式: 对于 $|z| \leqslant r_0$,

$$g(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n. \tag{2.2}$$

由柯西不等式, 我们有 $|a_n| \leqslant \frac{M}{(r_0)^n}$. 另一方面, 逐项微分, 得

$$g'(z) = \sum_{n \geqslant 0} n a_n z^{n-1}. \tag{2.3}$$

因此, 对于 $|z| \leqslant r < r_0$, 我们有

$$|g'(z)| \leqslant \frac{M}{r_0} \sum_{n \geqslant 0} \frac{n r z^{n-1}}{(r_0)^{n-1}}. \tag{2.4}$$

计算级数 $\sum\limits_{n \geqslant 0} n \left(\frac{r}{r_0}\right)^{n-1}$ 的和. 因为 nt^{n-1} 是 t^n 的导数, 于是 $\sum\limits_{n} nt^{n-1}$ 是 $\sum t^n = \dfrac{1}{1-t}$ 的导数, 从而

$$\sum_{n \geqslant 0} n \left(\frac{r}{r_0}\right)^{n-1} = \frac{1}{\left(1 - \frac{r}{r_0}\right)^2},$$

代入 (2.4), 得不等式

$$|g'(z)| \leqslant \frac{M}{r_0} \frac{1}{\left(1 - \frac{r}{r_0}\right)^2},$$

这样就证明了引理.

注意 可作出定理 2 的另一证明: 在柯西积分公式

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(t)}{t - z} dt$$

(其中 γ 表示与 Σ 同心且半径略大的圆盘的边界) 中的积分号下对 z 取导数, 得

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(t)}{(t - z)^2} dt.$$

因此我们有

$$f'(z) = \lim_n \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f_n(t)}{(t - z)^2} dt = \lim_n f'_n(z).$$

当 $z \in \Sigma$ 时, 极限一致成立.

命题 2.1 设 D 是一连通开集. 如果全纯函数 $f_n \in \mathscr{H}(D)$ 的序列在 D 内任何紧集上一致收敛, 并且如果在 D 内任何点, 每个 $f_n \neq 0$, 那么除非极限函数 f 恒等于零, 它在 D 内任何点 $\neq 0$.

证明 假定 f 不恒等于零. 那么由于 D 是连通的, f (由定理 1, 它是全纯的) 的零点是孤立的.假定 f 在 z_0 为零, 由第三章 §5 命题 4.1, 这零点的重数应等于取在圆 γ 上的积分:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz,$$

这里 γ 是心为 z_0, 半径很小的圆. 由定理 2, 上列积分是积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_n'(z)}{f_n(z)}dz$$

的极限, 而后者都为零, 这是由于全纯函数 f_n 不为零. 因此得到了矛盾, 命题得证.

定义 如果开集 D 内所给函数确定的映射是单射, 换句话说, 如果函数在不同的点总取不同的值, 那么我们说这函数是**单叶的.**

命题 2.2 设 D 是 $\mathbf{C}$ 中的开集. 如果全纯函数 $f_n \in \mathscr{H}(D)$ 的序列在 D 内任何紧集上一致收敛, 并且如果每个 f_n 是单叶的, 那么只要极限函数 f 不是常数, 它就是单叶的.

证明 用反证法. 设 z_1 及 z_2 是 D 内不同的两点, 且满足 $f(z_1) = f(z_2) = a$. 考虑两个开圆盘 S_1 及 S_2, 其心为 z_1 及 z_2, 其半径充分小, 使得 S_1 与 S_2 不相交, 并且都含在 D 内. 由命题 2.1, 对于充分大的 n, f_n 在 S_1 及 S_2 内取值 a, 与 f_n 的单叶性相矛盾.

3. 空间 $\mathscr{C}(D)$ 的拓扑

什么是在 D 内任何紧集上一致收敛的函数 $f_n \in \mathscr{C}(D)$ 的序列, 我们已经下过定义. 现更准确地在向量空间 $\mathscr{C}(D)$ 上确定一个拓扑.在向量子空间 $\mathscr{H}(D)$ 上, 我们将考虑导出拓扑.

对于由一紧集 $K \subset D$ 及一数 $\varepsilon > 0$ 所形成的任一对 (K, ε), 考虑 $\mathscr{C}(D)$ 中如下确定的子集 $V(K, \varepsilon)$:

$$f \in V(K,\varepsilon) \Longleftrightarrow |f(x)| \leqslant \varepsilon, \quad \text{对于 } x \in K. \tag{3.1}$$

为了使得函数 $f_n \in \mathscr{C}(D)$ 的序列在任何紧集上一致收敛于 f, 必须而且只需无论 K 及 ε 是怎样, 我们有: 对于充分大的 n,

$$f - f_n \in V(K, \varepsilon).$$

考虑这种拓扑：对于它，集 $V(K, \varepsilon)$ 形成 0 的一个基本邻域组 (这时, 一点 f 的邻域就定义为将 0 的邻域作平移 f 所得的集合). 上述必要与充分条件表明: $f_n \in \mathscr{C}(D)$ 的序列在这种拓扑 (如果存在一个的话) 中以点 f 作为极限.

命题 3.1 *在 $\mathscr{C}(D)$ 上实际存在着一个 (对平移不变的) 拓扑. 在这拓扑中, 集 $V(K,\varepsilon)$ 形成 0 的一个基本邻域组. 这种拓扑是唯一的, 并且可由对平移不变的距离确定.*

证明 这拓扑的唯一性是显然的, 因为我们已知 0 的一个基本邻域组, 从而由平移得到空间 $\mathscr{C}(D)$ 中每点的一个基本邻域组. 还只需找出对平移不变的一个距离, 使得在这距离所确定的拓扑中, $V(K,\varepsilon)$ 形成 0 的一个基本邻域组.

先引进一个概念: 设有紧集 $K_i \subset D$ 的一个增序列 (从而我们有 $K_i \subset K_{i+1}$), 使得含在 D 内的任何紧集 K 被包含在一个 K_i 内, 那么这序列称为**穷举紧集序列.**

引理 *在 D 内存在着一个这样的穷举紧集序列.*

事实上, 考虑含在 D 内的这样的紧圆盘, 其心的坐标及其半径都是有理数. 这些紧圆盘成一可数集. 把它们排成一序列: $D_1, D_2, \cdots D_n, \cdots$ 令

$$K_i = \bigcup_{n\leqslant i} D_n,$$

可证明紧集 K_i 成一穷举序列. 圆盘 D_n 的内部形成 D 的一个开覆盖, 从而含在 D 内的任何紧集 K 一定包含在一个 K_i 内.

此后假定选取了紧集 K_i 的一个穷举序列, 并且对于每个 $f \in \mathscr{C}(D)$, 令

$$M_i(f) = \sup_{z\in K_i} |f(z)|, \tag{3.2}$$

$$d(f) = \sum_{i\geqslant 1} 2^{-i} \inf(1, M_i(f)). \tag{3.3}$$

因为几何级数 $\sum\limits_{i\geqslant 1} 2^{-i}$ 是 (3.3) 右边级数的控制级数, 所以 $d(f)$ 是有限的. 现在要证明 $d(f)$ 有下列性质:

$$d(f) = 0 \Longleftrightarrow f = 0, \tag{3.4}$$

$$d(f+g) \leqslant d(f) + d(g), \tag{3.5}$$

$$\begin{cases} 2^{-i}\inf(1, M_i(f)) \leqslant d(f), \\ d(f) \leqslant M_i(f) + 2^{-i}. \end{cases} \tag{3.6}$$

证明 (3.4). 显然, 如果 f 恒等于零, $d(f) = 0$. 反之, 由 $d(f) = 0$ 可推出: 根据 (3.3), 无论 i 是什么正整数, $M_i(f) = 0$, 于是 f 在每个紧集 K_i 上的限制为零, 从而 f 恒等于零.

证明 (3.5). 显然

$$M_i(f+g) \leqslant M_i(f) + M_i(g),$$

由此容易推出

$$\inf(1, M_i(f+g)) \leqslant \inf(1, M_i(f)) + \inf(1, M_i(g));$$

然后由求和就可推出 (3.5).

关系式 (3.4) 及 (3.5) 表明: 如果我们把 f 及 g 的距离定义为等于 $d(f-g)$, 那么这距离是满足三角不等式的一个度量. 这度量对于平移不变.它在空间 $\mathscr{C}(D)$ 上确定对平移不变的一个分离拓扑.

现在证明不等式 (3.6). 由定义 (3.3) 显然可得到第一个结果. 另一方面, 如果 i 是整数 $\geqslant 1$, 我们有: 对于 $j \leqslant i$,

$$M_i(f) \leqslant M_i(f),$$

从而由 (3.3) 可推出

$$d(f) \leqslant \sum_{j \leqslant i} 2^{-j} M_i(f) + \sum_{j>i} 2^{-j},$$

由此得 (3.6).

为了完成命题 3.1 的证明, 还只要证明: 在上述距离所确定的拓扑中, 集 $V(K, \varepsilon)$ 形成 0 的一个基本邻域组.

1) 任何集 $V(K, \varepsilon)$ 是 0 的一个邻域, 事实上, 已给 K 及 ε, 而 $\varepsilon < 1$, 设 i 可使 $K \subset K_i$. 那么根据 (3.6) 中第一个不等式, 由关系式 $d(f) \leqslant 2^{-i}\varepsilon$ 可推出 $f \in V(K, \varepsilon)$.

2) 形如 $d(f) \leqslant \varepsilon$ 的 0 的任何邻域含形如 $V(K, \varepsilon')$ 的一个集. 事实上, 已给 ε, 选取整数 i, 使 $2^{-i} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, 那么由 (3.6) 中第二个不等式, 从 $f \in V\left(K_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ 可推出 $d(f) \leqslant \varepsilon$.

命题 3.1 的证明这样就完成了.

注意 可以对空间 $\mathscr{C}(D)$ 及其子空间 $\mathscr{H}(D)$ 应用度量空间, 或者更确切地说可度量化的拓扑空间的已知性质. 例如, 为了使得一个可度量化的空间 E 的子集 A 是闭的, 必须而且只需 E 中任何点, 只要它是 A 中一个点列的极限, 一定属于 A. 同样, 为了使得 E 到一个可度量化空间 E' 中的映射 f 在一点 $x \in E$连续,必须而且只需对于以 x 为极限的任何点 $x_n \in E$ 的序列, $f(x_n)$ 的序列有极限 $f(x)$. (读者可参看例如 J. 迪斯米埃的数学教程 I:J. Diximier, Cours de mathématiques I, Topologie, II 章, §3.)

考虑到以上说明, 我们看出空间 $\mathscr{C}(D)$ 是完备的.这是由于在任何紧集上一致收敛的连续函数序列的极限是连续的. 而第 2 段中的定理 1 及 2 可叙述如下:

子空间 $\mathscr{H}(D)$ 在 $\mathscr{C}(D)$ 内是闭的. 考虑从 $\mathscr{H}(D)$ 到 $\mathscr{H}(D)$ 的映射, 它使每个函数 f 对应于其导数 f', 那么这一映射是连续的.

§2. 亚纯函数项级数

1. 亚纯函数项级数的收敛性

设 D 是复平面 $\mathbf{C}$ 上一个开集, 考虑在 D 内亚纯函数 f_n 的序列. 现在要给出级数 $\sum\limits_n f_n$ 收敛的意义.

定义 考虑上述级数 $\sum f_n$ 及一集 $A \subset D$. 如果可以从这级数中除去有限项, 使得余下的函数 f_n 在 A 上没有极点, 并且形成在 A 上一致收敛的一个级数, 那么我们说级数 $\sum f_n$**在集** $A \subset D$ **上一致收敛.**

同样, 如果可从级数 $\sum\limits_n f_n$ 中除去有限项, 使得余下的各项 f_n 在 A 上没有极点, 而且形成在 A 上正规收敛的一个级数, 那么我们说级数 $\sum\limits_n f_n$**在** A **上正规收敛.**

显然, 在 A 上正规收敛的任何级数也在 A 上一致收敛. 下面我们所考虑的在 D 内亚纯的函数项级数, 都在 D 内任何紧集 K 上一致 (或正规) 收敛. 这种级数的和定义如下: 在 D 中相对紧的任何开集 U 上, 和就是亚纯函数

$$\sum_{n \leqslant n_0} f_n + \left(\sum_{n > n_0} f_n\right), \tag{1.1}$$

在这里应选取 n_0, 使得级数 $\sum\limits_{n>n_0} f_n$ 在闭包 $\overline{U}$ 上一致收敛. 在 (1.1) 中, 第一部分是有限个 U 内亚纯函数的和, 它是 U 内亚纯的函数; 第二部分是 U 内全纯函数项一致收敛级数的和, 它是 U 内全纯的函数. 容易看出, 在 U 内亚纯的函数 (1.1) 与整数 n_0 的选取无关.

定理 *设有 D 内亚纯函数 f_n 的级数 $\sum\limits_n f_n$. 如果这级数在 D 内任何紧集上一致 (或正规) 收敛, 则这级数的和 f 是 D 内亚纯的函数. 导数的级数 $\sum\limits_n f'_n$ 在 D 内任何紧集上一致 (或正规) 收敛, 并且它的和是已给级数和 f 的导数 f'.*

证明 我们已经看到, 在相对紧的任何开集 $U \subset D$ 内, 和 f 是亚纯的, 从而它在 D 内是亚纯的.

设已给相对紧的开集 U, 并且与 (1.1) 中一样选取 n_0. 在 U 内有

$$f' = \sum_{n \leqslant n_0} f'_n + \left(\sum_{n > n_0} f_n\right)'. \tag{1.2}$$

而对在 U 内全纯函数项级数 $\sum\limits_{n>n_0} f$, 我们可逐项取导数, 这是因为这级数在 U 中任何紧集上一致收敛. 由 §1 第 2 段中定理 2, 在含在 U 内的任何紧集上, 导数的级数 $\sum\limits_{n>n_0} f'_n$ 一致收敛于 $\left(\sum\limits_{n>n_0} f_n\right)'$. 这证明了在含在 U 内的任何紧集上, 亚纯函数

项级数 $\sum\limits_n f_n'$ 一致收敛于 f'. 对于相对紧的任何开集 U, 这都是正确的. 因而在含在 D 内的任何紧集上,$\sum\limits_n f_n'$ 一致收敛于 f'.

如果级数 $\sum\limits_n f_n$ 在 D 内任何紧集上正规收敛, 那么由 §1 第 2 段中引理, 可以推出级数 $\sum\limits_n f_n'$ 在 D 中任何紧集上正规收敛.

注意 显然, f 的极点的集 $P(f)$ 含在集 $P(f_n)$ 的并集内, 这里 $P(f_n)$ 表示 f_n 的极点的集. 此外, 关系式 (1.1) 还表明: 如果集 $P(f_n)$ 彼此不相交, 集 $P(f)$等于集 $P(f_n)$ 的并集. 更确切地说, 如果 z_0 是 f_n 的 k 阶极点, 它也是 f 的 k 阶极点.

2. 亚纯函数项级数的第一个例子

考虑级数

$$\sum_{-\infty<n<+\infty}\frac{1}{(z-n)^2},\tag{2.1}$$

其中和式是对所有的整数 n 作出的. 我们要证明, 这级数在平面 $\mathbf{C}$ 中任何紧集上正规收敛. 一个这样的紧集含在形如 $x_0\leqslant x\leqslant x_1$ 的一个带形中 (已令 $z=x+iy$). 因此只需证明, 级数 (2.1) 在有上列形状的任何带形中正规收敛. 一个这样的带形只含有限个整数 n, 在级数 $\sum\limits_{n<x_0}\dfrac{1}{(z-n)^2}$ 中, 每项的模不超过 $\dfrac{1}{(x_0-n)^2}$, 从而这一部分级数在这带形中正规收敛. 同样, 部分级数 $\sum\limits_{n>x_1}\dfrac{1}{(z-n)^2}$ 在这带形中也正规收敛. 因此在级数 (2.1) 中适当除去有限项后, 就剩下在这带形中正规收敛的一个全纯函数项级数. 证完.

设 $f(z)$ 是级数 (2.1) 的和, 它是整个平面 $\mathbf{C}$ 上的亚纯函数. 这函数有周期 1:

$$f(z+1)=f(z).$$

事实上, 令 $n-1=n'$, 就有

$$\sum_n\frac{1}{(z+1-n)^2}=\sum_{n'}\frac{1}{(z-n')^2}.$$

f 的极点是整数点 $z=n$, 这些是二重级点. 在这样一个极点的留数是零, 这是因为在点 $z=n$ 的邻域内, 我们有

$$f(z)=\frac{1}{(z-n)^2}+g(z),\quad g\text{是全纯的}.$$

命题 2.1 级数 (2.1) 的和 $f(z)$ 等于 $\left(\dfrac{\pi}{\sin\ \pi z}\right)^2$.

证明 我们有: 对于 x, $\lim\limits_{|y|\to+\infty}f(z)=0$ 一致成立. 换句话说, 对于任何 $\varepsilon>0$, 存在着 a, 使得由 $|y|\geqslant a$ 可推出 $|f(z)|\leqslant\varepsilon$.

事实上, 先假定 z 在带形 $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ 中, 并且其虚部 y 满足 $|y| \geqslant a$, 其中 $a > 0$. 在这区域中, 级数 (2.1) 是正规收敛的全纯函数项级数, 当 $|y| \to +\infty$ 时级数每项对于带形中的 x 一致趋近于 0. 因此当 $|y| \to +\infty$ 时, 级数 (它正规收敛) 的和对于带形中的 x 一致趋近于 0. 但 $f(z)$ 有周期 1, 如果把上列性质应用到宽度至少等于 1 的带形, 就可看出, 当 $|y| \to +\infty$ 时,$f(z)$ 对于 x 一致趋近于 0.

函数 $g(z) = \left(\dfrac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2$ 与 $f(z)$ 有同样的性质:

1° 它在 $\mathbf{C}$ 上亚纯, 并且有周期 1;

2° 它的极点是整数点 $z = n$, 这些是带有主要部分 $\dfrac{1}{(z-n)^2}$ 的二重极点.

3° 当 $|y| \to +\infty$ 时, $g(z)$ 对 x 一致趋近于 0.

性质 1° 是明显的. 为了证明 2°, 由于周期性, 只需证明原点 0 是带有主要部分 $\dfrac{1}{z^2}$ 的二重极点.

$$\begin{aligned}\left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 &= \left(\frac{\pi}{\pi z - \dfrac{1}{6}\pi^3 z^3 + \cdots}\right)^2 \\ &= \frac{1}{z^2}\left(1 - \frac{1}{6}\pi^2 z^2 + \cdots\right)^{-2} \\ &= \frac{1}{z^2} + \frac{\pi^2}{3} + z^2(\cdots).\end{aligned} \tag{2.2}$$

至于 3°, 可由下列关系式推出:

$$|\sin \pi z|^2 = \sin^2 \pi x + \mathrm{sh}^2 \pi y.$$

这关系式表明: 当 $|y|$ 趋近于无穷大时, $|\sin \pi z|$ (对 x 一致) 趋近于无穷大.

现在可证明命题 2.1. 因为 f 及 g 有相同的极点, 且其所带主要部分也相同, 所以函数 $f(z) - g(z)$ 在 $\mathbf{C}$ 上全纯. 我们要证明 $f - g$ 有界: 在带形 $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ 中, 它对 $y \leqslant a$ 是有界的 (由于在紧集上连续的函数在这集上有界), 并且因为它当 $|y|$ 趋近于无穷大时趋近于 0, 它对 $y \geqslant a$ 也是有界的. 既然函数 $f - g$ 在每个带形中有界, 由周期性, 它就在整个平面有界. 根据刘维尔定理 (第三章 §1 第 2 段), 函数 $f - g$ 是常数. 由于当 $|y|$ 趋近于无穷大时, 这函数趋近于 0, 可见这个常数为零. 于是命题 2.1 得证.

应用 我们有

$$\left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 - \frac{1}{z^2} = \sum_{n \neq 0} \frac{1}{(z-n)^2}, \tag{2.3}$$

且右边是在 $z = 0$ 的邻域内全纯的一个函数 $h(z)$. 我们有 $h(0) = \sum\limits_{n \neq 0} \frac{1}{n^2}$. 于是有

$$\lim_{z \to 0}\left[\left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 - \frac{1}{z^2}\right] = 2\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}. \tag{2.4}$$

而 (2.4) 的左边容易用有限项展开式 (2.2) 算出, 其值为 $\frac{\pi^2}{3}$. 由此得到欧拉所得到的关系式

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}. \tag{2.5}$$

3. 亚纯函数项级数的第二个例子

考虑级数

$$\frac{1}{z}+\sum_{n\neq 0}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right). \tag{3.1}$$

它的一般项等于 $\dfrac{z}{n(z-n)}$. 请读者证明这级数在平面 $\mathbf{C}$ 中任何紧集上正规收敛. 因此它的和 $F(z)$ 是 $\mathbf{C}$ 上的亚纯函数, 其极点是整数点 $z=n$. 这些都是单极点, 在这些点处的留数等于 1. 由第 1 段中的定理, 导数 $F'(z)$ 是导数的级数之和, 这就是说,

$$\begin{aligned} F'(z) &= -\frac{1}{z^2}-\sum_{n\neq 0}\frac{1}{(z-n)^2} \\ &= -\left(\frac{\pi}{\sin\pi z}\right)^2=\frac{d}{dz}\left(\frac{\pi}{\operatorname{tg}\,\pi z}\right). \end{aligned}$$

由此推得 $F(z)-\dfrac{\pi}{\operatorname{tg}\,\pi z}$ 是常数. 而我们从 (3.1) 看到 $F(-z)=-F(z)$, 因此函数 $F(z)-\dfrac{\pi}{\operatorname{tg}\,\pi z}$ 是 z 的奇函数, 又因它是常数, 这常数为零.

在级数 (3.1) 中, 我们可两两合并对应于整数 n 及整数 $-n$ 的项:

$$\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n}\right)=\frac{2z}{z^2-n^2},$$

最后得到关系式

$$\frac{1}{z}+\sum_{n\geqslant 1}\frac{2z}{z^2-n^2}=\frac{\pi}{\operatorname{tg}\,\pi z}. \tag{3.2}$$

4. 其他例子

与第 2 段中一样讨论, 可证明

$$\sum_{-\infty<n<+\infty}\frac{(-1)^n}{(z-n)^2}=\frac{\pi^2}{(\sin\pi z)(\operatorname{tg}\,\pi z)}. \tag{4.1}$$

由此与第 3 段中一样讨论, 可推出

$$\frac{1}{z}+\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\frac{2z}{z^2-n^2}=\frac{\pi}{\sin\pi z}. \tag{4.2}$$

5. 魏斯特拉斯 $\mathfrak{p}$ 函数

与第三章 §5 第 5 段中一样, 考虑 $\mathbf{C}$ 中的一个离散子群 Ω, 其基是比值不为实数的两向量 e_1 及 e_2 所构成的一个系. 我们立即注意到, 给出 Ω 不能完全确定基. 如果我们有另一个基 (e_1', e_2'), 那么第一个基的向量可以表示为第二个基的向量的整系数线性组合, 并且反过来也是这样. 由此推出系数矩阵的行列式是整数, 它在整数环中有逆元素, 从而等于 ± 1.

反之, 如果 e_1' 及 e_2' 是 e_1 及 e_2 的整系数线性组合, 并且系数矩阵的行列式等于 ± 1, 那么克拉默 (Cramer) 公式表明, 反之, e_1 及 e_2 是 e_1' 及 e_2' 的整系数线性组合, 从而 (e_1', e_2') 是 Ω 的一个基.

命题 5.1 设已给离散子群 Ω 如上. 那么级数

$$\mathfrak{p}(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Omega - (0)} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) \tag{5.1}$$

在 $\mathbf{C}$ 中任何紧集上正规收敛.

证明中需要下列引理:

引理 级数 $\displaystyle\sum_{\omega \in \Omega - (0)} \frac{1}{|\omega|^3}$ 收敛.

证明 对于每个整数 $n \geqslant 1$, 考虑点 $z = t_1 e_1 + t_2 e_2$ 所形成的平行四边形 P_n, 这里实数 t_1 及 t_2 满足 $\sup(|t_1|, |t_2|) = n$ (参看图 10). 在 P_n 的边界上恰好有 $8n$ 个 Ω 中的点. 其中每点与 0 的距离 $\geqslant kn$, 这里 $k > 0$ 是一个固定的数 (k 是 P_1 中的点到 0 的最短距离). 因此, 相应于 P_n 的边界上所有点的 $\dfrac{1}{|\omega|^3}$ 的和不超过 $\dfrac{8n}{k^3 n^3}$, 从而

$$\sum_{\omega \neq 0} \frac{1}{|\omega|^3} \leqslant \sum_{n \geqslant 1} \frac{8}{k^3 n^2}.$$

又因级数 $\sum \dfrac{1}{n^2}$ 收敛, 引理得证.

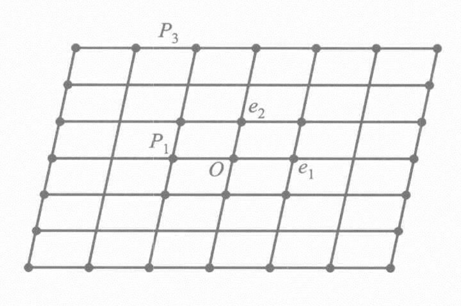


图 10

现在可证明: 在任何紧圆盘 $|z| \leqslant r$ 上, 级数 (5.1) 正规收敛. 对于所有 ω, 除去有限个外, $|\omega| \geqslant 2r$, 因此对于级数 (5.1) 中所有项, 除去有限个外, 当 $|z| \leqslant r$ 时,

$$\left|\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right| = \left|\frac{2\omega z - z^2}{\omega^2(\omega - z)^2}\right|$$
$$= \frac{\left|z\left(2 - \dfrac{z}{\omega}\right)\right|}{|\omega|^3\left|1 - \dfrac{z}{\omega}\right|^2} \leqslant \frac{r \cdot \dfrac{5}{2}}{|\omega|^3 \cdot \dfrac{1}{4}} = \frac{10r}{|\omega|^3}.$$

于是由引理推得, 级数 (5.1) 在圆盘 $|z| \leqslant r$ 上正规收敛.

定义 魏尔斯特拉斯函数 $\mathfrak{p}(z)$ 被定义为一亚纯函数, 即级数 (5.1) 的和. (当然, 这函数与离散子群 Ω 的取法有关.)

$\mathfrak{p}$ 的极点恰好是 Ω 中的点, 它们是二重极点, 在这些点处留数为零. 事实上, 在 $z = \omega$ 的邻域内, 我们有

$$\mathfrak{p}(z) = \frac{1}{(z-\omega)^2} + g(z), \quad g\text{是全纯的}.$$

函数 $\mathfrak{p}(z)$ 是 z 的偶函数, 这是因为

$$\mathfrak{p}(-z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \neq 0}\left(\frac{1}{(z+\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right),$$

而在上式右边, 只需把 ω 改变成 $-\omega$, 就可重新得到级数 (5.1).

由第 1 段中的定理, 对于导数 $\mathfrak{p}'$, 我们得到 (在任何紧集上正规收敛的) 级数展式:

$$\mathfrak{p}'(z) = -2\sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{(z-\omega)^3}. \tag{5.2}$$

这个关系式表明了函数 $\mathfrak{p}'$ 的周期性:

$$\mathfrak{p}'(z+\omega) = \mathfrak{p}'(z), \quad \text{对于任何}\omega \in \Omega,$$

以及 $\mathfrak{p}'(-z) = -\mathfrak{p}'(z)$ 这一事实.

我们要证明函数 $\mathfrak{p}$ 本身以所有的 $\omega \in \Omega$ 为周期. 为此只需证明 $\mathfrak{p}(z+e_i) = \mathfrak{p}(z)$, 其中 i 取值 1 及 2. 但

$$\mathfrak{p}(z+e_i) - \mathfrak{p}(z) = \text{常数}, \tag{5.3}$$

这是由于导数 $\mathfrak{p}'(z+e_i) - \mathfrak{p}'(z) = 0$. 在关系式 (5.3) 中取 z 的值为 $-\frac{e_i}{2}$. 既然 $\frac{e_i}{2}$ 及 $-\frac{e_i}{2}$ 不是 $\mathfrak{p}$ 的极点, 这样取值是可能的. 我们看到, (5.3) 右边的常数等于 $\mathfrak{p}\left(-\frac{e_i}{2}\right) - \mathfrak{p}\left(\frac{e_i}{2}\right)$, 但由于 $\mathfrak{p}$ 是偶函数, 这常数为零.

总之, 魏尔斯特拉斯函数 $\mathfrak{p}$ 是一亚纯函数, 它以 Ω 中的点为周期, 而其极点恰好是 Ω 中的点, 每个极点有 2 阶, 且带有主要部分 $\dfrac{1}{(z-\omega)^2}$.

$\mathfrak{p}(z)$ 的洛朗展式. 在原点的邻域内, $\mathfrak{p}$ 有洛朗展式. 因为函数 $\mathfrak{p}$ 是偶的, 并且由 (5.1), 在原点的邻域内全纯的函数

$$g(z)=\mathfrak{p}(z)-\frac{1}{z^2}=\sum_{\omega\neq 0}\left(\frac{1}{(z-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}\right)$$

在 $z=0$ 为零, 所以预先知道 $\mathfrak{p}$ 的展式的形状如下:

$$\mathfrak{p}(z)=\frac{1}{z^2}+a_2z^2+a_4z^4+\cdots. \tag{5.4}$$

容易用离散子群 Ω 的项表示出系数 a_2 及 a_4. 对级数 $g(z)$ 逐项求导数, 我们得到

$$a_2=3\sum_{\omega\neq 0}\frac{1}{\omega^4},\qquad a_4=5\sum_{\omega\neq 0}\frac{1}{\omega^6}, \tag{5.5}$$

现对关系式 (5.4) 逐项求导, 然后求平方, 得

$$(\mathfrak{p}'(z))^2=\frac{4}{z^6}-\frac{8a_2}{z^2}-16a_4+\cdots; \tag{5.6}$$

对 (5.4) 求立方, 得

$$(\mathfrak{p}(z))^3=\frac{1}{z^6}+\frac{3a_2}{z^2}+3a_4+\cdots, \tag{5.7}$$

由此得 $\quad \mathfrak{p}'^2-4\mathfrak{p}^3=-20\dfrac{a_2}{z^2}-28a_4+z^2(\cdots).$

因此函数

$$\mathfrak{p}'^2-4\mathfrak{p}^3+20a_2\mathfrak{p}+28a_4 \tag{5.8}$$

在原点的邻域内全纯, 并且在原点为零. 但这函数以 Ω 作为周期群, 因此它在 Ω 中任一点的邻域内全纯, 并且在 Ω 中任一点为零. 由于这函数在 Ω 以外没有极点, 可见它在整个平面全纯. 又因它在任何紧集上有界, 所以根据周期性, 它在 $\mathbf{C}$ 上有界. 而这函数在原点为零, 由刘维尔定理, 它恒等于零. 最后得恒等式

$$\mathfrak{p}'^2-4\mathfrak{p}^3+20a_2\mathfrak{p}+28a_4=0. \tag{5.9}$$

这关系式有一种重要的解释: 考虑代数曲线

$$y^2=4x^3-20a_2x-28a_4. \tag{5.10}$$

公式 $x=\mathfrak{p}(z), y=\mathfrak{p}'(z)$ 给出这曲线的一种参数表示式. 我们要证明: 满足 (5.10) 的任何点 $(x,y)\in\mathbf{C}\times\mathbf{C}$ 是一点 $z\in\mathbf{C}$ 的像, 这种 z 除去可能加上 Ω 中一元素外, 是确定的.

先找 $z \in \mathbf{C}$, 使得 $2z \in \Omega$, 而 $z \notin \Omega$. 在这样的点,$\mathfrak{p}$ 及 $\mathfrak{p}'$ 是全纯的. 由 $\mathfrak{p}'$ 的周期性, 我们有 $\mathfrak{p}'(z) = \mathfrak{p}'(-z)$. 又由于 $\mathfrak{p}'$ 是奇函数, $\mathfrak{p}'(z) = -\mathfrak{p}'(-z)$, 因此 $\mathfrak{p}'$ 在这样的点为零. 我们知道三个这样的点.

$$z = e_1/2, \quad z = e_2/2, \quad z = (e_1 + e_2)/2, \tag{5.11}$$

并且可立即看出, 任何满足 $2z \in \Omega$ 及 $z \notin \Omega$ 的点 z 与 (5.11) 的三点中的一点同余 (mod.Ω). (5.11) 中三点的同余类 (mod.Ω) 是不同的.

因为在每个周期平行四边形中, $\mathfrak{p}'$ 只有一个三重极点, 所以由第三章 §5 命题 5.1, 在每个周期平行四边形中, $\mathfrak{p}'$ 至多有三个不同的零点. 这些就是 (5.11) 中三点或与其关于 mod.Ω 同余的点. 又由同一命题, 在每个周期平行四边形中, 函数 $\mathfrak{p}$ 至多取一个已知值两次. 因为 $\mathfrak{p}(z_0) = \mathfrak{p}(-z_0)$, 所以如果 $2z_0 \notin \Omega$, 函数取任何形如 $\mathfrak{p}(z_0)$ 的值恰好两次. 反之, 如果 $2z_0 \in \Omega$, 而 $z_0 \notin \Omega$, 那么如我们刚看到的, 我们有 $\mathfrak{p}'(z_0) = 0$, 于是方程 $\mathfrak{p}(z) = \mathfrak{p}(z_0)$ 以 z_0 为二重根, 从而在每一个周期平行四边形中, $\mathfrak{p}$ 只取值 $\mathfrak{p}(z_0)$ 一次.

由此可见, 在每个周期平行四边形中, 值

$$\mathfrak{p}(e_1/2), \quad \mathfrak{p}(e_2/2), \quad \mathfrak{p}((e_1 + e_2)/2)$$

中的每一个只被取一次, 并且这三个值是不同的. 由 (5.9), 这些就是方程

$$4x^3 - 20a_2x - 28a_4 = 0 \tag{5.12}$$

的三个根, 从而这方程有三个不同的根. 总之, 我们证明了:

命题 5.2 已经离散群 Ω, 系数 a_2 及 a_4 由 (5.5) 确定的方程 (5.12) 有三个不同的根. 而且对于代数曲线 (5.10) 上任何点 $(x, y) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}$, 存在一点并且只有一点 (mod.$\Omega$)$z \in \mathbf{C}$, 使得

$$\mathfrak{p}(z) = x, \quad \mathfrak{p}'(z) = y.$$

以后我们要看到 (参看第六章 §5 第 3 段), 反之, 给出形如 (5.10) 的任意一个关系式, 其中右边有三个不同的根, 那么存在一个离散群 Ω, 使得 a_2 及 a_4 满足 (5.5). 如果 $\mathfrak{p}$ 表示关于这个群 Ω 的魏尔斯特拉斯函数, 那么公式 $x = \mathfrak{p}(z), y = \mathfrak{p}'(z)$ 给出了代数曲线 (5.10) 的一种参数表示式.

§3. 全纯函数的无穷乘积

1. 定义

设 $(f_n(z))$ 是复平面上开集 D 内的连续函数的序列. 如果下列两条件成立, 那么我们说无穷乘积 $\prod\limits_n f_n(z)$ 在 D 内一个子集 K 上**正规收敛:**

1° 在 K 上, 极限式 $\lim\limits_n f_n(z) = 1$ 一致成立, 特别, 这意味着在 K 上, 对于充分大的 n, $f_n - 1$ 的模 < 1, 从而 $\log f_n$ 在 K 上是一个确定的函数 (我们取对数的主支);

2° 一般项为 $\log f_n$ (它对充分大的 n 是确定的) 的级数在 K 上正规收敛.

我们可给出一个条件, 使其与上述条件 1° 及 2° 相结合等价. 令 $f_n = 1 + u_n$, 条件 1° 表明序列 u_n 在 K 上一致收敛于 0. 当 u_n 很小时, $\log f_n$ 及 u_n 是等价无穷小, 从而条件 2° 表明级数 $\sum\limits_n u_n$ 在 K 上正规收敛.

总之, 为了使得无穷乘积 $\prod\limits_n f_n$ 在 K 上正规收敛, 必须而且只需级数 $\sum\limits_n u_n$ 在 K 上正规收敛.

定义 如果无论 K 是含在开集 D 内的任何紧集, 无穷乘积 $\prod\limits_n f_n$ 在 K 上正规收敛, 那么我们说这乘积**在 D 内任何紧集上正规收敛.**

一个必要与充分的条件是: 如果令 $f_n = 1 + u_n$, 级数 $\sum\limits_n u_n$ 在 D 内任何紧集上正规收敛. 如果是这样, 当 n_0 无限增大时, 乘积 $\prod\limits_{n \leqslant n_0} f_n$ 在 D 内任何紧集上一致收敛于一极限 $f(z)$, 这极限显然是 z 的连续函数. 为了看出这个收敛性, 只需对于充分大的 n, 取因子 f_n 的对数.

2. 全纯函数的正规收敛乘积的性质

定理 1 如果函数 f_n 在 D 内全纯, 并且如果无穷乘积 $\prod\limits_n f_n$ 在 D 内任何紧集上正规收敛, 那么 $f = \prod\limits_n f_n$ 在 D 内全纯. 而且我们有

$$f = f_1 f_2 \cdots f_p \left(\prod_{n>p} f_n \right). \tag{2.1}$$

f 的零点集是函数 f_n 的零点集的并集, f 的零点的阶数, 等于每个函数 f_n 所具有的阶数的和.

证明 因为 f 是各因子为全纯的有限乘积 (在任何紧集上一致收敛) 的极限, 所以 f 是全纯的. 在任何相对紧的开集 U 上, 结合公式 (2.1) 显然成立. 由于 $u_n = f_n - 1$ 在 U 上一致收敛于 0, 当 n 充分大时, 函数 f_n 在 U 内没有零点, 于是定理中最后的结论是明显的.

定理 2 在定理 1 中假设下, 亚纯函数项级数 $\sum\limits_n f_n'/f_n$ 在 D 中任何紧集上正规收敛 (按照 §2 第 1 段中的意义), 而且它的和恰好是对数导数 f'/f.

证明 设 U 是 D 内相对紧的开集. 对于充分大的 p, 函数

$$g_p = \exp \left(\sum_{n>p} \log f_n \right) \tag{2.2}$$

在 U 内确定, 并且全纯. 由 (2.1), 在 U 内, 我们有

$$\frac{f'}{f} = \sum_{n \leqslant p} \frac{f_n'}{f_n} + \frac{g_p'}{g_p}. \tag{2.3}$$

但

$$\frac{g_p'}{g_p}=\sum_{n>p}\frac{f_n'}{f_n}, \tag{2.4}$$

其中右边的级数在 D 内任何紧集上一致收敛. 事实上, 对数项级数 $\sum\limits_{n>p}\log f_n$ (在任何紧集上一致) 收敛于 $\log g_p$, 因此, 各项导数的级数 (在任何紧集上一致) 收敛于导数 g_p'/g_p (参看 §1 第 2 段定理 2).

比较 (2.3) 及 (2.4), 可以看出: 在 U 上, 我们有

$$\frac{f'}{f}=\sum_{n}\frac{f_n'}{f_n},$$

其中级数在 U 内任何紧集上正规收敛. 对于任何 U 都有这一结果, 从而定理得证.

3. 例　$\sin\pi z$ 的无穷乘积展式

考虑无穷乘积

$$f(z)=z\prod_{n\geqslant 1}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right). \tag{3.1}$$

由于数值级数 $\sum\limits_{n}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛, 级数 $\sum\limits_{n}\dfrac{z^2}{n^2}$ 在平面 $\mathbf{C}$ 中任何紧集上正规收敛, 从而上列乘积在 $\mathbf{C}$ 中任何紧集上正规收敛. 因此 $f(z)$ 是整个平面上的全纯函数, 并且它的零点是 z 的所有整数值. 它们都是单零点.

由定理 2, 可以逐项求对数导数, 这样就得到在平面中任何紧集上正规收敛的亚纯函数项级数:

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{1}{z}+\sum_{n\geqslant 1}\frac{2z}{z^2-n^2}. \tag{3.2}$$

我们已经看到 (§2 第 3 段), 这级数的和是

$$\frac{\pi}{\operatorname{tg}\pi z}=\frac{g'(z)}{g(z)},$$

其中已令 $g(z)=\sin\pi z$. 于是 $f'/f=g'/g$, 从而

$$\frac{f(z)}{z}=c\frac{\sin\pi z}{z}.$$

还只要确定常数 c. 由 (3.1), 当 z 趋近于 0 时, $f(z)/z$ 趋近于 1. 又因 $\dfrac{\sin\pi z}{z}$ 以 π 为极限, 于是可看出 $c=\dfrac{1}{\pi}$. 这样我们就得到了公式

$$\frac{\sin\pi z}{\pi z}=\prod_{n\geqslant 1}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right). \tag{3.3}$$

4. Γ 函数

对于每个整数 $n \geqslant 1$, 考虑由下式确定的全纯函数 g_n :

$$\begin{aligned} g_n(z) &= z(1+z)\left(1+\frac{z}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{z}{n}\right)n^{-z} \\ &= \frac{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}{n!}n^{-z}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

对于 $n \geqslant 2$, 我们有

$$\frac{g_n(z)}{g_{n-1}(z)} = \left(1+\frac{z}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)^z = f_n(z). \tag{4.2}$$

如果 $|z| \leqslant r$, 并且如果 $1 \leqslant r < n$, 可考虑 $\log f_n(z)$ 的主支; 如果 $\dfrac{r}{n}$ 充分小, 我们有

$$|\log f_n(z)| \leqslant 2\left(\frac{r^2}{2n^2}+\frac{r^3}{3n^3}+\cdots\right) \leqslant 2\frac{r^2}{n^2}. \tag{4.3}$$

因此在平面中任何紧集上, 级数 $\sum\limits_n \log f_n(z)$ 正规收敛, 从而在平面中任何紧集上, 无穷乘积 $g_1 \cdot \prod\limits_{n\geqslant 2}\dfrac{g_n}{g_{n-1}}$ 正规收敛. 这乘积的值是一全纯函数 $g(z)$, 即函数

$$g_n = g_1 f_2 \cdots f_n$$

在任何紧集上的一致极限.

函数 g 以数 $0, -1, -2, \cdots, -n, \cdots$ 作为零点, 它们都是单零点. 如果 z 不是整数, 可作商

$$\frac{g(z)}{g(z+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{g_n(z)}{g_n(z+1)} = \lim_{n\to\infty} = \frac{nz}{n+z+1} = z. \tag{4.4}$$

因此亚纯函数 $\dfrac{g(z)}{g(z+1)}$ 实际上是全纯的, 并且恒等于 z. 我们还有

$$g(1) = \lim_{n\to\infty} g_n(1) = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1. \tag{4.5}$$

定义 亚纯函数 $1/g(z)$ 记作 $\Gamma(z)$. 它以所有整数 $n \leqslant 0$ 作为单极点, 而且它满足关系式

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \Gamma(1) = 1. \tag{4.6}$$

这两式显然可由 (4.4) 及 (4.5) 推出. 由 (4.6) 就整数 $n \geqslant 0$ 递推, 得

$$\Gamma(n+1) = n!. \tag{4.7}$$

现在来计算乘积 $\Gamma(z)\cdot\Gamma(1-z)$. 我们有

$$g(z)g(1-z)=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-z}{n}\cdot z\cdot\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right). \tag{4.8}$$

由第 3 段, 上式右边等于 $\dfrac{\sin\pi z}{\pi}$. 取倒数, 得

$$\Gamma(z)\cdot\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}, \tag{4.9}$$

在上式中特别取 $z=\dfrac{1}{2}$, 得

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$

魏尔斯特拉斯无穷乘积. 应用 (4.1), 显然可写出

$$g_n(z)=z\cdot\prod_{k=1}^{n}\left(\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z/k}\right)e^{z\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)}. \tag{4.10}$$

当 n 无穷增大时, 指数 $z\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\log n\right)$ 趋近于 Cz, 这里 C 表示欧拉常数. 因此在 (4.10) 中取极限, 则得

$$g(z)=ze^{Cz}\prod_{k=1}^{\infty}\left(\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z/k}\right), \tag{4.11}$$

而且读者可证明右边的乘积在平面中任何紧集上正规收敛. 由于 $g=1/\Gamma$, 在 (4.11) 两边取对数导数, 得 (参看定理 2)

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=-\frac{1}{z}-C+\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{z+n}\right), \tag{4.12}$$

由此特别得

$$-C=\lim_{z\to 0}\left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}+\frac{1}{z}\right). \tag{4.13}$$

最后, 在关系式 (4.12) 中逐项求导数 (参看 §2 第 1 段), 得

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(z+n)^2}. \tag{4.14}$$

比较上式右边的级数与和为 $\left(\dfrac{\pi}{\sin\pi z}\right)^2$ 的级数 (§2 第 2 段). 当 z 是正实数时, (4.14) 的右边显然是正数. 因此对于实数 $z>0, \log\Gamma(z)$ 是 z 的凸函数.

§4. $\mathscr{H}(D)$ 的紧子集

我们要讲 $\mathscr{H}(D)$ 中紧集的特性, 这构成过去所谓全纯函数的 “正规族” 理论.

1. $\mathscr{H}(D)$ **的有界子集**

现给出向量空间 $\mathscr{H}(D)$ 的有界子集的定义, 这定义只是对任何拓扑向量空间都适用的定义的一个特例. 特别, 同一定义适用于 $\mathscr{C}(D)$ 的有界子集.

定义 已给子集 $A \subset \mathscr{H}(D)$, 如果对于 O 的任何邻域 $V(K,\varepsilon)$, 存在着有限正数 λ, 使得 $A \subset \lambda V(K,\varepsilon)$, 那么子集 A 是**有界的.** 这里我们把 $V(K,\varepsilon)$ 关于原点 O, 比值为 λ 的相似映像记作 $\lambda V(K,\varepsilon)$.

关系式 $A \subset \lambda V(K,\varepsilon)$ 表明: 无论 f 是 A 中的什么函数, 对于 $z \in K$, 我们有 $|f(z)| \leqslant \lambda\varepsilon$. 因此,为了使得 D 内全纯函数的集 A 有界, 必须而且只需对于任何紧集 $K \subset D$, 存在有限数 $M(K)$, 使得对于任何 $f \in A$ 及任何 $z \in K$, 我们有

$$|f(z)| \leqslant M(K). \tag{1.1}$$

换句话说, 如果函数 $f \in A$ 在 D 内任何紧集上一致有界 (显然, 上界 $M(K)$ 依赖于紧集 K), A 是一有界集.

如果 A 是 $\mathscr{H}(D)$ 的有界子集, 那么 A 的闭包也是有界的 (这里的闭包是 D 内任何紧集上一致收敛的拓扑意义下的). 这是显然的, 因为如果 (1.1) 对任何 $f \in A$ 成立, 那么它对属于 A 的闭包的任何函数也成立.

命题 1.1 从 $\mathscr{H}(D)$ 到 $\mathscr{H}(D)$ 的映射 $f \to f'$ 把任何有界集变成有界集.

这可从 §1 第 2 段中用来证明定理 2 的引理立即推出.

2. 基本定理的叙述

已给复平面上开集 D 内全纯函数的空间 $\mathscr{H}(D)$, 我们要求空间 $\mathscr{H}(D)$ 的紧子集的特征性质.

命题 2.1 如果 $A \subset \mathscr{H}(D)$ 是紧的, 那么 A 是闭的及有界的.

证明 因为空间 $\mathscr{H}(D)$ 是可度量化的 (参看 §1 第 3 段), 所以它是分离的. 因此由一般拓扑中的一个经典结果,$\mathscr{H}(D)$ 的任何紧子集是闭的.

还只要证明: 如果 A 是紧的, A 就是有界的. 为此, 设 K 是含在 D 内的一个紧集, 并且考虑从空间 $\mathscr{H}(D)$ 到 $\mathbf{R}$ 的映射

$$f \to \sup_{z\in K} |f(z)|.$$

显然, 这是一个连续映射, 因此它在由 $f \in A$ 所组成的紧集上所取值的集是有界的, 这表明 $f \in A$ 在紧集 K 上一致有界. 这结果对 D 所含的任何紧集 K 成立, 从而集 A 正是向量空间 $\mathscr{H}(D)$ 中的有界子集.

注意 命题 2.1 是对空间 $\mathscr{H}(D)$ 叙述的, 但它对 D 内连续函数的空间 $\mathscr{H}(D)$ 也适用. 反过来, 我们将要叙述的命题 2.1 的逆命题, 却只对 D 内全纯函数空间 $\mathscr{H}(D)$ 的子集适用.

基本定理 *$\mathscr{H}(D)$ 的任何有界闭子集是紧的.*

系 *为了使得 $\mathscr{H}(D)$ 的子集 A 是紧的, 必须而且只需它是有界的及闭的.*

基本定理的证明将在第 3, 4 及 5 段中进行. 这定理的一个等价的形式如下.

$\mathscr{H}(D)$ 的任何有界子集是相对紧的. 逆命题也是正确的.

3. 基本定理证明的原则

设 A 是 $\mathscr{H}(D)$ 的一个有界闭子集. 由于拓扑空间 A 是可度量化空间 $\mathscr{H}(D)$ 的一个子空间, 它也是可度量化的. 为了证明 A 是紧的, 只需证明:*A 中元素的任何无穷序列含有收敛于 A 中一元素的无穷子序列.*

事实上, 由拓扑学, 我们有下列引理:

引理 1 *设 A 是这样的度量空间:A 中点的任何无穷序列含有收敛于 A 中一点的无穷序列, 那么 A 是紧的.*

证明 设 (U_i) 是开集 U_i 所组成的 A 的一个覆盖. 要证明这覆盖中包含一个有限覆盖, 首先证明:

a) 存在一数 $\varepsilon > 0$, 使得任何球 $B(x,\varepsilon)$ 至少含在一个 U_i 内 (用 $B(x,\varepsilon)$ 表示心为 $x \in A$, 半径为 ε 的闭球).

用反证法证明 a) : 否则我们应有点 $x_n \in A$ 的一个序列以及数 ε_n 的收敛于 0 的一个递减序列, 使得对于每个 n, 球 $B(x_n,\varepsilon_n)$ 不含在任何一个 U_i 内. 由假设, 序列 (x_n) 包含一个收敛于一点 $a \in A$ 的无穷序列. 我们可假定序列 (x_n) 收敛于 a. 设 U_i 是含 a 的一个开集, 那么 U_i 包含一个球 $B(a,r)$. 只要 n 充分大, 就有 $x_n \in B(a,r/2)$ 以及 $\varepsilon_n \leqslant r/2$. 由此推出, 对于充分大的 $n, B(x_n,\varepsilon_n)$ 含在 U_i 内, 这就是一个矛盾.a) 得证.

现在证明:

b) 对于任何 $\varepsilon > 0, A$ 可被有限个球 $B(x_n,\varepsilon)$ 所覆盖. 显然, 结合 a) 及 b) 就可推出: 存在有限个开集 U_i 覆盖 A.

我们又用反证法证明 b): 否则应有点 $x_n \in A$ 的无穷序列, 各点的相互距离 $\geqslant \varepsilon$. 而由假设, 可从这序列中取出一个收敛子序列, 由此显然得到一个矛盾. 这样完成了引理 1 的证明.

4. 一个引理

由第 3 段, 问题现归结为证明: 如果 A 是含在 $\mathscr{H}(D)$ 内的有界集, 那么函数 $f_k \in A$ 的任何无穷序列含有在 D 内任何紧集上一致收敛的无穷序列. 对于属于有

界集的全纯函数列的收敛性, 下列引理是一个有用的准则.

引理 2 设 D 是心为 z_0 的开圆盘, 并且设 A 是 $\mathscr{H}(D)$ 的一个有界子集. 为了使得函数 $f_x \in A$ 的序列收敛 (对于在 D 内任何紧集上的一致收敛拓扑), 必须而且只需下列条件成立:

$C(z_0)$: 对于每个整数 $n \geqslant 0, n$ 阶导数 $f_k^{(n)}(z_0)$ 的序列有极限.

(对于 $n=0$, 这条件指的是: 函数 f_k 在 z_0 的值的序列有极限.)

证明 条件 $C(z_0)$ 是必要的, 因为对于每个 n, n 阶导数 $f_k^{(n)}$ 的序列在 D 中任何紧集上一致收敛 (§1 第 2 段定理 2). 还只需证明由条件 $C(z_0)$ 可推出: 在心为 z_0, 半径 r 严格小于圆盘 D 的半径的任何紧圆盘上, 序列 (f_k) 一致收敛.

取 $r_0 > r$, 而使 r_0 本身严格小于 D 的半径. 由于 A 是有界的, 存在着有限数 M, 使得

$$|f_k(z)| \leqslant M, \quad \text{对于} |z-z_0| \leqslant r_0 \tag{4.1}$$

考虑全纯函数 f_k 的泰勒展式:

$$f_k(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_{n,k}(z-z_0)^n. \tag{4.2}$$

由柯西不等式, 我们有

$$|a_{n,k}| \leqslant \frac{M}{(r_0)^n}. \tag{4.3}$$

因此, 对于 $|z-z_0| \leqslant r$, 我们有: 无论 k 及 h 是什么正整数,

$$|f_k(z) - f_h(z)| \leqslant \sum_{0 \leqslant n \leqslant p} |a_{n,k} - a_{n,h}| r^n + 2M \sum_{n > p} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n. \tag{4.4}$$

由于 $r/r_0 < 1$, 可选取充分大的 p, 使得

$$2M \sum_{n>p} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n < \frac{\varepsilon}{2},$$

这里 ε 表示预先任意给定的一数 > 0. 由条件 $C(z_0)$, 当两整数 k 及 h 同时无限增大时, 对于每个 n, 差 $a_{n,k} - a_{n,h}$ 趋近于 0. 这是由于我们有

$$a_{n,k} = \frac{1}{n!} f_k^{(n)}(z_0).$$

于是可选取整数 k_0, 使得我们有:

$$\sum_{0 \leqslant n \leqslant p} |a_{n,k} - a_{n,h}| r^n \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{对于} k \geqslant k_0, h \geqslant k_0.$$

因此从 (4.4) 可看出: 我们有

$$|f_k(z) - f_h(z)| \leqslant \varepsilon, \quad \text{对于} k \geqslant k_0, h \geqslant k_0, |z-z_0| \leqslant r. \tag{4.5}$$

这证明了函数 f_k 的序列在心为 z_0, 半径为 r 的紧圆盘上一致收敛. 于是引理 2 得证.

5. 基本定理的证明

现在我们能够证明基本定理 (第 2 段).

已给开集 D 可以被心为 $z_i \in D$ 的可数个开圆盘序列所覆盖. 对于每个整数 $n \geqslant 0$ 以及对于每个 i, 考虑线性映射

$$\lambda_i^n : \mathscr{H}(D) \to \mathbf{C}. \tag{5.1}$$

它使每个函数 f 与数 $f^{(n)}(z_i)$ 相对应. 然后考虑属于有界集 A 的函数 f_k 的一个序列, 用 $\mathbf{N}$ 表示正整数集, 我们要证明存在着一个无穷子集 $N' \subset \mathbf{N}$, 使得对于每一对 (i, n),

$$\lim_{k \in N'} \lambda_i^n(f_k) \text{存在}. \tag{5.2}$$

而对于每个 i 及每个 n, 因为 f_k 是在有界集 A 中取的, 并且映射 λ_i^n 是连续的, 所以当指标 k 在 $\mathbf{N}$ 中取值时, 数 $\lambda_i^n(f_k)$ 成一有界序列. 把可数个映射 λ_i^n 排成一个序列, 记作 $\mu_1 \cdots, \mu_m, \cdots$ 可以证明存在着 $\mathbf{N}$ 的一个无穷子集 N', 使得对于每个整数 $m \geqslant 1$,

$$\lim_{k \in N'} \mu_m(f_k) \text{存在}. \tag{5.3}$$

为此, 我们应用 "对角序列" 法. 因为对于 $k \in \mathbf{N}, \mu_1(f_k)$ 的序列有界, 所以存在着无穷子集 $N_1 \subset \mathbf{N}$ 使得

$$\lim_{k \in N_1} \mu_1(f_k) \text{存在}.$$

对于 $k \in N_1$, $\mu_2(f_k)$ 的序列有界, 因此存在着无穷子集 $N_2 \subset N_1$, 使得

$$\lim_{k \in N_2} \mu_2(f_k) \text{存在}.$$

这样逐步确定无穷子集

$$N_1 \supset N_2 \supset \cdots \supset N_m.$$

于是 N_{m+1} 是 N_m 的无穷子集, 它使得

$$\lim_{k \in N_{m+1}} \mu_{m+1}(f_k) \text{存在}.$$

现在考虑如下确定的无穷整数序列 N': 对于每个整数 $m \geqslant 1$, 序列 N' 的第 m 项是序列 N_m 的第 m 项. 序列 N' 是严格增序列, 并且显然, 序列 N' 中从第 m 项开始, 所有整数都属于 N_m. 这对于任何 m 成立, 从而序列 N' 满足条件 (5.3), 证完.

这样, 第 2 段中的基本定理就完全证明了.

注意 实际上, 以上所作证明在于证明, 在特殊情况下, 紧空间的 (无穷) 乘积是紧的.

6. 基本定理的几个推论

我们常应用下列原理:设 A 是 D 内全纯函数的有界集. 如果函数 $f_k \in A$ 的序列只有一个凝聚函数 (按在任何紧集上一致收敛拓扑的意义), 那么这序列是收敛的 (按上述拓扑意义).

这可由拓扑中关于紧空间的一个经典定理推出. 作为这原理的应用, 首先考虑开集 D 是连通的, 而且在含在 D 内的非空开集 D' 中每一点, 函数 f_k 的序列简单收敛的情形 (收敛性是指: 对于每一点 $z \in D'$, 数 $f_k(z)$ 的序列有极限). 如果情况是这样, 并且如果 f_k 属于一个有界集, 序列 (f_k) 在 D 内任何紧集上一致收敛. 事实上, 如果 f 及 g 是序列 f_k 在 D 内的两个凝聚全纯函数, 我们显然有: 在任何点 $z \in D', f(z) = g(z)$, 由此推出 f 及 g 在 D 内恒等 (根据解析开拓原理).

现在考虑满足引理 2 中条件 $C(z_0)$ 的全纯函数 f_k 的有界序列情形. 在这里 z_0 表示 D 中一点. 这时如果 D 是连通的, 序列 (f_k) 在 D 中任何紧集上一致收敛. 事实上, 如果 f 及 g 是序列 (f_k) 的两个凝聚全纯函数, 对于任何整数 $n \geqslant 0$, 我们有 $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$, 从而根据解析开拓原理, f 及 g 恒等.

我们也可考虑这种情形: D 内全纯函数 f_k 的有界序列, 在 D 的非离散子集 E 中每一点简单收敛, 而总假定 D 是连通的. 这种序列在 D 中任何紧集上一致收敛, 这是因为如果 f 及 g 是序列 (f_k) 的两个凝聚全纯函数, 差 $f(z)-g(z)$ 在 E 中任何点为零, 而由于 D (连通的) 内不恒等于零的全纯函数的零点集是离散集, 差 $f(z)-g(z)$ 恒等于零.

习 题

1. 设 $f(z)$ 是圆盘 $|z| < 1$ 内全纯的函数, 并且假定 $f(0) = 0$. 证明在这圆盘中任何紧集上, 级数 $\sum\limits_{n \geqslant 1} f(z^n)$ 一致收敛. (已给 $0 < r < 1$, (在圆盘 $|z| < r$ 内) 应用施瓦茨引理, 对于 $|z| \leqslant r$, 用 $|z|^n$ 与一常数的乘积作为 $|f(z^n)|$ 的上界.)

2. 设 D 是平面 $\mathbf{C}$ 上的一个连通开集, 又设 $\{f_n(z)\}$ 是 D 内全纯函数的一个序列, 而且假定这序列在 D 内任何紧集上一致收敛于不恒等于零的函数 $f(z)$. 还设 Γ 是 D 中紧集 K 的有向边界, 并且在 Γ 上, $f(z) \neq 0$. 证明存在着一个正整数 N, 使得对于 $n \geqslant N$, 在 Γ 上我们有 $f_n(z) \neq 0$, 并且 f_n 及 f 在 K 中的零点的个数相同. (如果 M 是 $|f(z)|$ 在 Γ 上的下确界, 并且如果选取 N, 使得对于 $n \geqslant N$ 以及 $z \in \Gamma$, $|f_n(z) - f(z)| < M$, 那么可对函数 $f(z)$ 及 $f_n(z) - f(z)$ 应用鲁歇定理 (第三章习题 19).

由此推出: 如果 a 是 $f(z)$ 的零点, 那么存在着 D 中点列 (a_n), 使得

$$\lim_n a_n = a, \quad f_n(a_n) = 0.$$

3. 设 τ 是满足 $\mathrm{Im}(\tau) > 0$ 的一复数, 并且令 $q = e^{\pi i \tau}$. 证明: 在变量 u 的复平面 $\mathbf{C}$ 中任何紧

集上, 下列两级数一致收敛:

$$\sum_{-\infty<n<+\infty}(-1)^n q^{n^2} e^{2\pi niu},$$

$$-i\sum_{-\infty<n<+\infty}(-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n+1)\pi iu}.$$

如果用 $\vartheta_0(u),\vartheta_1(u)$ 表示这两级数所确定的 (在全平面) 全纯的函数, 我们有下列关系式:

$$\vartheta_0(u+1)=\vartheta_0(u),\quad \vartheta_1(u+1)=-\vartheta_1(u),$$

$$\vartheta_0(u+\tau)=-q^{-1}e^{-2\pi iu}\vartheta_0(u),\quad \vartheta_1(u+\tau)=-q^{-1}e^{-2\pi iu}\vartheta_1(u),$$

$$\vartheta_0\left(u+\frac{\tau}{2}\right)=iq^{-1/4}e^{-\pi iu}\vartheta_1(u).$$

证明函数 $\vartheta_0(u),\vartheta_1(u)$ 不恒等于零. (例如可证明

$$\int_0^1|\vartheta_0(x)|^2dx=1+2\sum_{n\geqslant 1}|q|^{n^2}.\Big)$$

证明复数 $m+n\tau$ (其中 m 及 n 是整数) 是函数 $\vartheta_1(u)$ 的零点, 数

$$m+\left(n+\frac{1}{2}\right)\tau$$

是 $\vartheta_0(u)$ 的零点. 由计算函数 h'/h 在适当选取的周期平行四边形边界上的积分, 证明无其他零点.

4. 设 a 是一实数, 像 §2 第 2 段中那样, 证明下列等式:

$$\frac{\pi i\ \mathrm{sh}\,2\pi a}{\sin\pi(z+ai)\sin\pi(z-ai)}=\sum_{-\infty<n<+\infty}\left(\frac{1}{z+n-ai}-\frac{1}{z+n+ai}\right),$$

并且由此导出

$$\frac{\pi}{a}\cdot\frac{\mathrm{sh}\,2\pi a}{\mathrm{ch}\,2\pi a-\cos 2\pi z}=\sum_{-\infty<n<+\infty}\frac{1}{(z+n)^2+a^2}.$$

5. 证明下列展式:

$$\frac{\pi}{\cos\pi z}=\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}(2n-1)}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2-z^2},\tag{i}$$

$$\pi\,\mathrm{tg}\pi z=2z\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2-z^2}.\tag{ii}$$

由 (i) 导出: 我们有

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

像 §3 第 3 段中那样, 由 (i) 及 (ii) 导出下列公式:

$$\cos\pi z=\prod_{n\geqslant 1}\left(1-\frac{4z^2}{(2n-1)^2}\right),\tag{iii}$$

$$\cos\frac{\pi z}{4}-\sin\frac{\pi z}{4}=\prod_{n\geqslant 1}\left(1+\frac{(-1)^n z}{2n-1}\right). \tag{iv}$$

(我们注意

$$\frac{(\cos t/2-\sin t/2)'}{\cos t/2-\sin t/2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\sin t}{\cos t}.)$$

6. 证明我们有

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right)+\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(z+1/2)}{\Gamma(z+1/2)}\right)=2\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(2z)}{\Gamma(2z)}\right).$$

(应用公式 (4.14).) 通过积分, 由此推出

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=e^{az+b}\Gamma(2z),\quad a\text{及}b\text{为常数}.$$

依次令 $z=1/2,1$, 确定 a 及 b.

用同样方法证明更一般的公式: 对于任何整数 $p\geqslant 2$,

$$\Gamma(pz)=(2\pi)^{-(p-1)/2}p^{pz-1/2}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{p}\right)\cdots\Gamma\left(z+\frac{p-1}{p}\right).$$

(为了确定积分常数, 令 $z=1/p,1$. 可应用公式 (4.9) (取 $z=q/p, 1\leqslant q\leqslant p$) 以及关系式 $\sin\dfrac{\pi}{p}\sin\dfrac{2\pi}{p}\cdots\sin\dfrac{p-1}{p}\pi=p/2^{p-1}$ (对于 $p\geqslant 2$) 计算

$$\Gamma(1/p)\Gamma(2/p)\cdots\Gamma(p-1/p).)$$

7. (i) 证明含实参数 x 的积分

$$\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$$

在任何区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上一致收敛, 这里 $0<a<b$. 由此推出: 积分 $\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$ 在半平面 $\mathrm{Re}(z)>0$ 内确定一个全纯函数, 记作 $G(z)$.

(ii) 证明: 对于实数 $x>0$ 以及整数 $n\geqslant 1$, 有

$$\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt=\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}. \tag{1}$$

对于 $0\leqslant t\leqslant n$, 有

$$e^{-t}\left(1-\frac{e}{2n}t^2\right)\leqslant\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\leqslant e^{-t}. \tag{2}$$

(先证明不等式 $1-t/n\leqslant e^{-1/n}\leqslant 1-t/n+t^2/2n^2$, 然后应用对于 $a\geqslant b\geqslant 0$ 成立的不等式 $a^n-b^n\leqslant na^{n-1}(a-b)$, 并且取 $a=e^{-t/n}, b=1-t/n$.)

由此推出

$$\lim_n\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dt=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt,$$

并且对于 $\mathrm{Re}(z)>0$,

$$G(z)=\Gamma(z).$$

8. 求函数 $\Gamma(z)$ 在极点 $z=-n(n=0,1,2,\cdots)$ 的留数.

9. 证明: 如果

$$\mathfrak{p}(z)=\frac{1}{z^2}+a_2z^2+a_4z^4+\cdots+a_{2n}z^{2n}+\cdots$$

是函数 $\mathfrak{p}(z)$ 在原点的洛朗展式, 由 §2 中微分方程 (5.9) 可递推求出 $a_{2n}(n\geqslant 3)$ 为 a_2 及 a_4 的多项式. 实际求出 a_6,a_8.

10. 设 P 是函数 $\mathfrak{p}$ 的周期平行四边形. 证明: 如果 α 及 β 是两复数, 函数

$$\mathfrak{p}'(z)-\alpha\mathfrak{p}(z)-\beta \tag{1}$$

在 P 中有三个零点, 并且其和等于一个周期 (应用第三章 §5 命题 5.1 和 5.2). 由此推出: 如果 u 及 v 是满足 $u\pm v\not\equiv 0(\mathrm{mod}.\Omega)$ 的两复数, 那么可求出 α 及 β, 使得函数 (1) 以 u,v 及 $-u-v$ 作为零点. 再由此推出: 如果 $u+v+w=0$, 我们有

$$\det\begin{vmatrix}\mathfrak{p}(u) & \mathfrak{p}'(u) & 1\\ \mathfrak{p}(v) & \mathfrak{p}'(v) & 1\\ \mathfrak{p}(w) & \mathfrak{p}'(w) & 1\end{vmatrix}=0.$$

11. 再用上面习题 3 中的记号. 证明无穷乘积

$$\prod_{n\geqslant 1}[(1-q^{2n-1}e^{2\pi iu})(1-q^{2n-1}e^{-2\pi iu})]$$

在复变量 u 的整个平面上确定一个全纯函数 $f(u)$.$f(u)$ 的零点是什么? 证明我们有

$$f(u)=c\vartheta_0(u),$$

其中 c 表示一常数.

(我们要证明 $f(u)/\vartheta_0(u)$ 在整个平面上是双周期全纯函数, 并且要应用第三章 §5 中命题 5.1 的系.)

第六章　全纯变换

§1. 一般概念, 实例

1. 全纯变换 $w = f(z)$ 当 $f'(z_0) \neq 0$ 时的局部研究

命题 1.1 设 $w = f(z)$ 是在 z_0 的邻域内的全纯函数. 假定 $f'(z_0) \neq 0$, 并且令 $w_0 = f(z_0)$. 当 z 及 w 分别与 z_0 及 w_0 充分接近时, 关系式 $w = f(z)$ 与关系式 $z = g(w)$ 等价, 其中 g 表示在 w_0 的邻域内 (完全确定) 的全纯函数, 并且满足 $g(w_0) = z_0$.

这命题可由第一章 §2 命题 9.1 推出, 也可由第四章 §5 命题 6.1 推出.

这样, 在全纯变换的导数 $\neq 0$ 的一点之邻域内, 其逆变换是全纯变换. 而且用上面的记号, 导数 g' 可由下列关系式给出:

$$g'(w) = \frac{1}{f'(z)}.$$

特别, 这导数在点 w_0 不等于 0.

用 c 表示不为零的复数 $f'(z_0)$. 与变换 f 在点 z_0 相切的 (齐次) 线性变换是变换

$$W = cZ. \tag{1.1}$$

把它看作平面的变换, 这是一个直接相似变换. 特别, 这变换使角及其方向保持不变. 换句话说, 如果平面 (z) 上两个可微弧 γ_1 及 γ_2 都以点 z_0 作为出发点, 那么通过变换 $w = f(z)$, 这两弧变换成出发点为 w_0 的两可微弧, 而且它们在点 w_0 的两半切线所形成的有向角, 等于弧 γ_1 及 γ_2 在点 z_0 的两半切线的有向角. 因此我们说, 全纯变换 $w = f(z)$ 在使导数 $f'(z_0) \neq 0$ 的任何点 z_0 是保形的.

反之, 平面上保持角度不变 (不一定使角度的方向不变) 的任何 (齐次) 线性变换有 (1.1) 的形状, 或者有下列形状:

$$W = c\bar{Z}. \tag{1.2}$$

事实上, 如果 T 是一个这样的变换, 那么存在着一个直接相似变换 S, 使得复合变换 $S^{-1}\circ T$ 使实坐标为 (1, 0) 的点不变. 既然 $S^{-1}\circ T$ 保持角度不变, 点 (0, 1) 变换为 $(0, a)$, 其中 a 是实数 $\neq 0$. 于是 (1, 1) 变换为 $(1,\ a)$. 因此向量 (1, 1) 与 (1, 0)、及 $(1,\ a)$ 与 (1, 0) 所成的角相等, 从而 $a=\pm 1$. 如果 $a=1$, $S^{-1}\circ T$ 是恒等变换, 从而 $T=S$ 有 (1, 1) 的形状. 如果 $a=-1$, $S^{-1}\circ T=U$ 是关于实轴对称的变换, 从而 $T=S\circ U$ 有 (1.2) 的形状. 证完.

在 (1.1) 情形, 线性变换保持角的方向不变; 在 (1.2) 情形, 它改变角的方向. 现考虑复变量 $z=x+iy$ 的平面上连通开集 D 内所确定的变换 $w=f(z)$. 假定这变换连续可微, 并且在 D 内任何点, 其雅可比行列式 $\neq 0$. 如果这变换使角度保持不变 (换句话说, 如果在 D 内每点的切线性变换属于 (1.1) 或 (1.2) 两种类型之一), 那么在 D 内每一点, 下列两关系式中有一个成立:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0, \qquad \frac{\partial f}{\partial z}=0.$$

这两关系式绝不可能在 D 内某一点同时成立, 否则 f 对于 x 及 y 的偏导数在这点要同时为零, 与雅可比行列式不为零的假设相矛盾. 因为两函数 $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ 及 $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ 是连续的, 所以 D 内使两函数中每一个为零的点所成的集在 D 内是闭的, D 是这两个不相交的闭集的并集, 又因 D 是连通的, 这两闭集中有一个是空的. 因此只有两种可能情形: 或者在 D 内任何点, $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$ (于是变换是全纯的); 或者在 D 内任何点, $\dfrac{\partial f}{\partial z}=0$ (于是 f 是 $\bar{z}$ 的全纯函数). 在第二种情形, 我们说变换是*反全纯的*. 总之:

命题 1.2 *为了使得平面上连通开集 D 内雅可比行列式到处 $\neq 0$ 的连续可微变换使角度保持不变, 必须而且只需它是全纯的或反全纯的. 在第一种情形, 它使角的方向保持不变; 在第二种情形, 它改变角的方向.*

2. 全纯变换 $w=f(z)$ 当 $f'(z_0)=0$ 时的局部研究

首先考虑一种特别情形, 即下列变换情形:

$$w=z^p, \tag{2.1}$$

其中 $p\geqslant 2$ 表示一整数. z^p 的导数在 $z=0$ 为零. 逆变换

$$z=w^{1/p} \tag{2.2}$$

是多值的, 与 $w\neq 0$ 的每个值相对应, 有 z 的 p 个不同的值. 因为在变换 (2.1) 下, w 的辐角等于 z 的辐角的 p 倍, 所以这一变换在原点不能使角度保持不变. 我们看到,

通过变换, 角度要乘以整数 p. 当点 z 围绕原点转一圈时, w 按同一方向围绕原点转 p 圈. 关于 z 所描出的闭曲线的指标以及变换后 w 所描出的曲线的指标, 请读者作出确切的叙述.

现研究全纯变换 $w = f(z)$ 当 $f'(z_0) = 0$ 时的一般情形. 为了简化, 假定 $z_0 = 0, f(z_0) = 0$. 在下面, 函数 f 在 0 的邻域内不恒等于零这一假定是主要的. 如果 p 是 f 在原点的零点的重数, 那么 f 在原点的泰勒展式有下列形状：

$$w = cz^p(1 + f_1(z)), \tag{2.3}$$

其中常数 $c \neq 0$, 函数 f_1 在原点全纯, 并且满足 $f_1(0) = 0$. 令

$$f_2(z) = c^{1/p}(1 + f_1)^{1/p}.$$

函数 f_2 在原点的邻域内全纯 (选取它的一个分支), 并且我们有 $f_2(0) \neq 0$. 关系式 (2.3) 与下式等价:

$$w = (zf_2(z))^p. \tag{2.4}$$

令

$$zf_2(z) = t. \tag{2.5}$$

由第 1 段, 从这关系式可解出 $z = g(t)$, 其中 g 在 0 的邻域内全纯, 在点 0 为零，而且 $g'(0) \neq 0$. 由 (2.4), 我们有 $t = w^{1/p}$, 从而最后得:

$$z = g(w^{1/p}). \tag{2.6}$$

于是在原点的邻域内, 关系式 $w = f(z)$ 与形如 (2.6) 的一个关系式等价, 其中 g 在 0 的邻域内全纯, 在原点为零, 而且 $g'(0) \neq 0$.

特别, 对应于与 0 充分接近并且 $\neq 0$ 的每个值 w, 有 z 的 p 个不同的值. 我们说, 对于 $w = f(z)$ 的逆变换 (2.6), 原点是一个 p 阶临界点.

3. 全纯变换

定理 设 f 是连通开集 D 内不恒等于常数的全纯函数. 那么像 $f(D)$ 是平面上的一个开集.

证明 只需证明, 对于任何点 $z_0 \in D$, 像 $f(D)$ 包含 $f(z_0)$ 的一个邻域中所有点. $f'(z_0) \neq 0$ 情形可由第 1 段证明: 在这种情形下, f 确定从 z_0 的一个邻域到 $f(z_0)$ 的一个邻域上的同胚. $f'(z_0) = 0$ 情形 (函数 f 在 z_0 的邻域内不恒等于常数) 可由第 2 段证明: 在这种情形下, 存在着 z_0 的一个邻域, 在这邻域内, 函数 f 取充分接近于 $f(z_0)$, 并且 $\neq f(z_0)$ 的每个值 p 次. 于是在所有情形下, 定理得证.

注意 对于含在 D 内的任何开集 D', 像 $f(D')$ 是一开集. 我们说映射 f 是一**开映射**.

系 如果 f 是连通开集 D 内的全纯单叶函数 (参看第五章 §1 第二段), 那么 f 是 D 到开集 $f(D)$ 上的同胚, 并且逆映射 f^{-1} 在 $f(D)$ 内全纯.

证明 f 是单映射, 并且是连续开映射. 因为 f 是开的, 所以它的逆映射 f^{-1} 是连续的. 又由于 f 是单叶的, 根据第 2 段, 在任何点 $z_0 \in D, f'(z_0) \neq 0$. 因此根据第 1 段, f^{-1} 在每点 $f(z_0)$ 全纯.

定义 设 D 是变量 z 的平面上的开集, D' 是变量 w 的平面上的开集. 所谓 D 到 D' 上的**同构**, 就是由一全纯映射 f 所确定的一个同胚, 而逆映射也是全纯的.

由上列系可以推出, 只要 D 内的一个全纯映射是单叶的, 它就是 D 到它的像 $f(D)$ 上的一个同构.

注意 上列定义及结论不仅可用于复变量平面上的开集 D, 而且更一般地可用于黎曼球面上的开集 D, 映射 f 也可在黎曼球面上取值.

4. 多叶全纯变换的实例

即令导数 $f'(z)$ 到处 $\neq 0$, 函数 f 也可能是多叶的 (即非单叶的). 最简单的例子是变换

$$w = e^z,$$

它是以 $2\pi i$ 为周期的周期函数. 它把带形 $a < \operatorname{Im} z < b$ 变换为满足

$$a < \arg w < b$$

的点 w 的集. 为了使得上述变换在带形中是单叶的, 必须而且只需

$$b - a \leqslant 2\pi.$$

作为例子, 我们研究变换 $w = \cos z$. 当 z 是 π 的整数倍时, 其导数为零. 我们有

$$w = \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}).$$

因此变换 $w = \cos z$ 是下列两变换的复合:

$$t = e^{iz} \quad 及 \quad w = \frac{1}{2}(t + 1/t).$$

现研究逆变换. 如果任意给出 w, 与它对应有 t 的两个值, 即二次方程

$$t^2 - 2\,wt + 1 = 0$$

的两个根, 其积等于 1. 如果 $w \neq \pm 1$, 这两个根不相等. 与每个根相对应, 有 z 的无穷个值, 这些值可从其中一值加上 2π 的任意整数倍而推出.

令 $z = x + ig, w = u + iv(x, y, u, v$ 是实数). 我们有

$$u = \operatorname{ch} y \cos x, \quad v = -\operatorname{sh} y \sin x.$$

如果取定 y, 当 x 变动时, 点 (u, v) 描出椭圆

$$\frac{u^2}{\operatorname{ch}^2 y} + \frac{v^2}{\operatorname{sh}^2 y} = 1$$

(如果 x 在长为 2π 的区间中变动, 点 (u, v) 描出这椭圆一次). 如果取定 x, 当 y 变动时, 点 (u, v) 描出双曲线

$$\frac{u^2}{\cos^2 x} - \frac{v^2}{\sin^2 x} = 1$$

两支中的一支.

为了研究 w 作为 z 的函数怎样变动, 根据周期性, 只需让 x 从 $-\pi$ 变到 $+\pi$, 而 y 从 $-\infty$ 变到 $+\infty$. 但是如果我们把 z 换成 $-z, w$ 不变. 因此我们只让 x 从 0 变到 π. 如果把 y 换成 $-y$, 但不改变 x, 那么 u 不变, 而 v 换成了 $-v$. 因此关于实轴为对称的两点 w_1 及 w_2, 与关于实轴为对称的两点 z_1 及 z_2 相对应. 最后, 只需让 x 从 0 变到 π, 让 y 从 0 变到 $+\infty$. 于是设 D 为开集.

$$0 < x < \pi, \quad y > 0. \tag{D}$$

先让点 $z = x + iy$ 描出 D 的 "有向边界": 1° 当 x 取为 0, y 从 $+\infty$ 递减到 0 时, w 在实轴上从 $+\infty$ 递减到 $+1$; 2° 当 y 取作 0, x 从 0 递增到 π 时, w 在实轴上从 $+1$ 递减到 -1; 3° 当 x 取作等于 π, y 从 0 递增到 $+\infty$ 时, w 在实轴上从 -1 递减到 $-\infty$. 因此映射 $w = \cos z$ 把 D 的边界同胚映射到实轴上.

读者可证明 D 被同胚映射到下半平面 $v < 0$ 上. 准确地说, 当点 z 描出线段 $y = y_0$ (常数 > 0), 而 x 从 0 递增到 π 时, 点 w 描出下半平面 $v < 0$ 中以 $+1$ 及 -1 为焦点, 以 $\operatorname{ch} y_0$ 为长半轴及 $\operatorname{sh} y_0$ 为短半轴的半椭圆一次, 并且只描出一次. 当点 z 描出半直线 $x = x_0 (0 < x_0 < \pi)$, 而 y 从 0 递增到 $+\infty$ 时, 点 w 描出下半平面 $v < 0$ 中以 $+1$ 及 -1 为焦点, 以 $|\cos x_0|$ 及 $\sin x_0$ 为半轴的双曲线的一个半支一次, 并且只描出一次.

带形 $0 < x < \pi$ (y 从 $-\infty$ 变到 $+\infty$) 被同胚映射到除去 (在实轴上的) 两个半直线 $w \geqslant +1$ 及 $w \leqslant -1$ 的平面上.

关于角度, 我们注意到, 变换 $w = \cos z$ 使在 $z = 0$ 及 $z = \pi$ 中每一点处的角度增加了一倍 (D 的边界上的直角变换成为平角). 这与 $\cos z$ 的导数 $-\sin z$ 在这些点有单零点这一事实相应. 在 D 的内部, 变换保角. 如我们已经看到的, 它把平面 (z) 上坐标轴的平行线变换成共焦点的椭圆及双曲线.

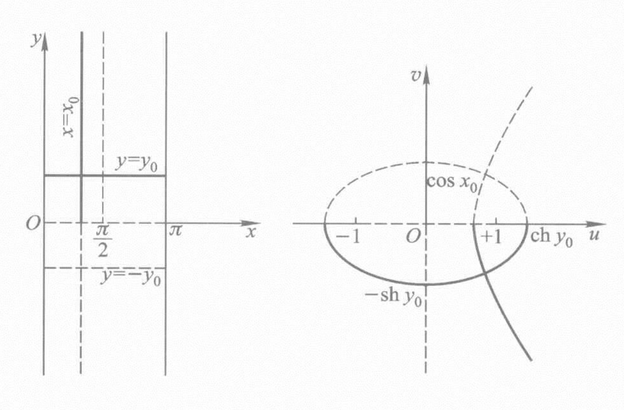


图 11

§2. 保形表示

1. 问题的陈述

设 D 及 D' 是黎曼球面 S_2 上的两个连通开集. 我们要问: 是否存在着 D 到 D' 上的一个同构? 或即是否存在着 D 到 D' 上的一个单叶全纯映射? 使这问题有解的一个必要条件在性质上纯粹是拓扑的: 必须 D 及 D' 是同胚的. 事实上, 任何同构是一同胚. 例如, 如果 D 是单连通的, D' 也必须是单连通的. 上述必要条件不是充分的, 下列定理就可表明这一点:

定理 1 平面 $\mathbf{C}$ 与开圆盘 $|z|<1$ 不是同构的 (虽然它们是同胚的).

证明 假定存在着 $\mathbf{C}$ 到圆盘 $|z|<1$ 上的一个同构 f. 那么 f 是有界全纯函数, 因此由刘维尔定理, 它是常数. 由于 f 是单叶的, 这样就得到了一个矛盾.

2. D 的自同构

假定至少存在着 D 到 D' 上的一个同构 f, 并且想求 D 到 D' 上的所有同构 g. 变换 $S=f^{-1}\circ g$ 是 D 到其本身上的一个同构, 换句话说, 它是 D 的一个自同构. 我们有

$$g=f\circ S. \tag{2.1}$$

反之, 如果 S 是 D 的一个自同构, (2.1) 所确定的变换 g 是 D 到 D' 上的一个同构. 这样, 把 D 的任一自同构与 D 到 D' 上的一个特殊同构 f 相结合, 我们得到 D 到 D' 上的所有同构. 显然, D 的所有自同构组成一个群 $\Gamma(D)$. 而且如果 f 是 D 到 D' 上的一个同构, 映射 $S\to f\circ S\circ f^{-1}$ 是群 $\Gamma(D)$ 到群 $\Gamma(D')$ 上的一个同构.

在下列例子中, 对于某些特殊的开集, 我们要具体求出群 $\Gamma(D)$.

3. 复平面的自同构

在这里取整个复平面 $\mathbf{C}$ 作为 D . 设 $z \to f(z)$ 是 $\mathbf{C}$ 的一个自同构; 函数 $f(z)$ 在 $\mathbf{C}$ 内全纯; 因此一开始只有两种情形是可能的:

1° f 以无穷远点作为本性奇点;

2° f 是一多项式.

我们将看出情形 1° 是不可能的: 因此 f 是单叶的, 所以 f 所作出的环形 $|z|>1$ 的像与 f 所作出的圆盘 $|z|<1$ 的像不相交, 而圆盘 $|z|<1$ 的像是一非空开集. 因此 $|z|>1$ 的像不是在整个平面稠密, 于是由魏尔斯特拉斯定理 (第三章 §4 第 4 段), 无穷远点不是 f 的本性奇点. 这样, f 是次数 $n \geqslant 1$ 的一个多项式, 由达朗贝尔定理, 方程 $f(z)=w$ 有 n 个不同的根 (除了 w 取特别的值外). 而由假设, f 是单叶的. 由此断定 $n=1$. 于是我们证明了下列定理：

定理 2　*$\mathbf{C}$ 的自同构群由线性变换*

$$z \to az+b, \quad a \neq 0 \tag{3.1}$$

所组成.

当 $a=1$ 时, 变换 (3.1) 是一平移, 它没有不动点, 反之, 当 $a \neq 1$ 时, 变换有唯一的不动点, 即

$$z=\frac{b}{1-a}.$$

我们注意到, 变换 (3.1) 形成平面 $\mathbf{C}$ 上的一个*传递群*. 换句话说, 给出任意两点 z_1 及 z_2, 在群中至少有一个把 z_1 变成 z_2 的变换. 容易定出一点 z_0 的*稳定子群*,即使点 z_0 不动的变换的子群. 例如原点的稳定群由直接相似映射 $z \to az$ 所组成.

4. 黎曼球面的自同构

考虑单应变换

$$w=\frac{az+b}{cz+d}, \quad ad-bc \neq 0. \tag{4.1}$$

如果我们用同一复数 $\neq 0$ 乘常数 a,b,c,d, 仍然得到同一变换. 因此必须总是把系数 a,b,c,d 看作除去相差一常数因子外, 是确定的.

这种变换在黎曼球面 S_2 上确定, 并且在黎曼球面 S_2 取值. 确切地说, 对于 $z=\infty$, 如果 $c \neq 0$, 我们有 $w=a/c$. 如果 $c=0$ (由此推出 $a \neq 0$), 就有 $w=\infty$. 每个变换 (4.1) 有逆变换

$$z=\frac{dw-b}{-cw+a}, \tag{4.2}$$

这表明每个单应变换 (4.1) 是 S_2 到 S_2 上的一个同胚.

这样, (4.1) 形的变换组成黎曼球面 S_2 的一个自同构群 G. 我们要证明:

定理 3 *除了单应变换 (4.1) 外, 黎曼球面 S_2 没有其他自同构.*

证明 考虑 G 中使 S_2 上无穷远点为不动点的变换所构成的子群. 这是相应于 $c=0$ 的变换, 又因 $d\neq 0$, 可假定 $d=1$. 换句话说, G 中使无穷远点为不动点的变换的子群, 就是平面 $\mathbf{C}$ 上所有自同构 $w=az+b$ 组成的群 (定理 2). 因此这一子群也是 S_2 的使无穷远点为不动点的所有自同构组成的群. 于是定理 3 可由下列一般性的引理推出:

引理 *设 D 是黎曼球面 S_2 上一个开集, 又设 G 是 D 的所有自同构组成的群 $\Gamma(D)$ 的一个子群. 假定下列条件成立:*

a) G 在 D 内是传递的;

b) 至少 D 中有一点的稳定子群含在 G 内.

那么 G 是 D 的所有自同构组成的群.

引理的证明 设 $S\in\Gamma(D)$, 又设 $z_0\in D$, 其稳定子群含在 G 内. 由于 G 是传递的, 存在着 $T\in G$, 使得 $T(z_0)=S(z_0)$. 因此变换 $T^{-1}\circ S\in\Gamma(D)$ 使点 z_0 不动, 从而它属于 G. 于是 $S=T\circ(T^{-1}\circ S)$ 属于 G. 证完.

5. 单应变换群的几何研究, 半平面及圆盘的等价性

当 $c\neq 0$ 时, 变换 (4.1) 可写成熟知的标准形状:

$$w=\frac{a}{c}+\frac{(bc-ad)/c^2}{z+d/c}. \tag{5.1}$$

由此可见, (4.1) 由下列变换组成:

$$z_1=z+\frac{d}{c},\quad z_2=\frac{1}{z_1},\quad z_3=kz_2,\quad w=z_3+\frac{a}{c}$$

$\left(令\ k=\dfrac{bc-ad}{c^2}\right)$, 其中每一变换是一种特殊类型的单应变换. 于是任何单应变换为平移、比值 $\neq 0$ 的相似变换以及反演对称变换所组成 (所谓反演对称变换是形如 $z'=1/z$ 的变换. 事实上, 这种变换由关于实轴的反射以及关于心为 0 , 半径为 1 的圆的反演组成). 上列结果是对变换 (4.1) 在 $c\neq 0$ 时证明的. 在 $c=0$ 时, 这一结果也显然正确. 由此推出, 任何单应变换把圆或直线变换成为圆或直线 (直线可看作过无穷远点的圆). 另一方面, 由于单应变换是 $\mathbf{S}_2$ 到 $\mathbf{S}_2$ 的全纯映射, 它们是保形的, 特别, 它们把正交的圆 (或直线) 变换成正交的圆 (或直线).

任给两圆 (或直线), 总存在着一个单应变换, 使这两圆 (或直线) 能相互变换. 特别, 存在着一个单应变换, 把实轴 $y=0$ 变换为单位圆. 例如只需取变换

$$w=\frac{z-i}{z+i}. \tag{5.2}$$

为了证明这一点, 只需证明实轴上特殊三点 (例如 $0, 1$ 及 ∞) 变换为单位圆上的点 (在这里, 即点 $w=-1, w=-i$ 与 $w=1$).

事先知道, 把实轴变为单位圆的单应变换, 把以实轴为边界的一个半平面变换为单位圆的内部, 而把另一半平面变换为单位圆的外部 (包括无穷远点). 在变换 (5.2) 的情形, 由于点 $z=i$ 变换为 $w=0$, 上半平面 $y>0$ 变换为圆盘 $|w|<1$.

6. 半平面及单位圆盘的自同构

用 P 表示上半平面 $y>0$, B 表示开圆盘 $|w|<1$. 由第 2 段的末尾, 变换 (5.2) 建立了群 $\Gamma(P)$ 到群 $\Gamma(B)$ 上的一个同构. 现在要明显地求出上述两个群.

我们已求出黎曼球面上所有自同构的群. 在这些自同构中, 把实轴 $y=0$ 变换为其本身的变换成一子群, 这是下列单应变换的子群:

$$z \to \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad-bc \neq 0, \tag{6.1}$$

其中系数 a, b, c, d 是实数. 事实上, 显然, 如果系数是实数, 变换 (6.1) 把实轴变换为其本身. 反之, 如果实轴被变换为其本身, 那么系数 a, b, c, d 除了可相差一因子外, 由一组实系数线性方程所确定, 考虑实轴上不同的三点 z_1, z_2, z_3, 并且取这些点变换而得的点为实数, 就可得到这一方程组.

由于 (6.1) 的系数的确定可以相差一个实数 $\neq 0$ 的因子, 在 (6.1) 中, 我们可假定 $ad-bc=\pm 1$. 容易看出, 在变换 (6.1) 中, 把上半平面 $y>0$ 变换为其本身的是满足 $ad-bc=1$ 的变换. 为了证明这一点, 只需证明 $\dfrac{ai+b}{ci+d}$ 的实部 >0. 变换 (6.1) 中满足 $ad-bc=1$ 的, 形成群 $\Gamma(P)$ 的一个子群 G, 这里 $\Gamma(P)$ 是半平面 P 的所有自同构之群. 除了可能相差 ± 1 的因子外, G 中每个变换确定一组系数 a, b, c, d.

定理 4 *上述群 G 包含半平面 P 的所有自同构.*

当证明了这定理时, 可推出半平面 P 的每个自同构可开拓成为黎曼球面上的自同构, 这在事先完全不是显然的.

为了证明 $G=\Gamma(P)$, 先注意到群 G 在半平面 P 内是传递的. 事实上, 通过 G 中适当的变换, 点 i 可变换为半平面中任一点 $a+ib$ $(b>0)$. 这是可立即看出的. 如果我们能证明半平面中一点 (例如点 $z=i$) 的稳定群被包含在 G 内, 那么由第 4 段的引理, 定理 4 得证. 因此归结为证明点 i 的稳定群是由单应变换组成的.

变换 (5.2) 确定这个稳定群到 $\Gamma(B)$ 的一个子群 $|w|<1$ 上的同构, 这一子群是由圆盘 $|w|<1$ 的使圆心 O 不动的自同构所组成. 于是只需证明:

命题 6.1 *如果圆盘 $|z|<1$ 的一个自同构使 O 不动, 那么它是一个旋转 $z \to ze^{i\theta}$, 其中 θ 是某一角.*

证明 设 $z \to f(z)$ 是单位圆盘的一个自同构, 并且满足 $f(0)=0$. 由施瓦茨引理 (第三章 § 3), 对于满足 $|z|<1$ 的任何 z, 我们有

$$| f(z) | \leqslant | z | .$$

但把施瓦茨引理应用于逆变换, 也可得

$$| z | \leqslant | f(z) | .$$

比较上两个等式, 我们得到 $| f(z) | = | z |$. 于是再应用施瓦茨引理, 就有 $f(z) = cz$, 其中 c 是模为 1 的一个常数. 证完.

这样, 同时完成了定理 4 的证明. 作为练习, 在上半平面 $y > 0$ 的所有自同构群中, 明显定出点 $z = i$ 的稳定子群. 通过变换 (5.2), 在单位圆盘的自同构群中, 点 0 的稳定子群变换为上述点 $z = i$ 的稳定子群. 我们求出依赖于实参数 θ 的变换:

$$z \to \frac{z + \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{1 - z \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}.$$

为了定出单位圆盘 $| z | < 1$ 的自同构群, 原则上只需用 (5.2) 变换上半平面的自同构群. 但是我们要用直接的方法来求. 问题在于定出所有的单应变换

$$z' = \frac{az + b}{cz + d},$$

使得它们把圆 $z\bar{z} - 1 = 0$ 变换为圆 $z'\bar{z}' - 1 = 0$, 并且把开圆盘 $1 - z\bar{z} > 0$ 变换为开圆盘 $1 - z'\bar{z}' > 0$. 上列第一个条件表明, 无论 z 是模为 1 的什么数, 我们有

$$(az + b)(\bar{a}\bar{z} + \bar{b}) = (cz + d)(\bar{c}\bar{z} + \bar{d}).$$

由此推出

$$a\bar{b} = c\bar{d} \tag{6.2}$$

以及

$$a\bar{a} - c\bar{c} = d\bar{d} - b\bar{b}. \tag{6.3}$$

于是我们有

$$1 - z'\bar{z}' = \frac{(d\bar{d} - b\bar{b})\ (1 - z\bar{z})}{| cz + d |^2},$$

并且为了使得由 $1 - z\bar{z} > 0$ 可推出 $1 - z'\bar{z}' > 0$, 必须而且只需

$$d\bar{d} - b\bar{b} > 0. \tag{6.4}$$

把不等式 (6.4) 与等式 (6.3) 相结合, 可推出 $a \neq 0, d \neq 0$. 由 (6.2), 我们有

$$\frac{c}{a} = \frac{\bar{b}}{\bar{d}} = \bar{\lambda}, \quad \text{其中 } | \lambda | < 1.$$

又由 (6.3),

$$|a|=|d|.$$

于是

$$\frac{az+b}{cz+d}=\frac{a}{d}\quad\frac{z+\lambda\dfrac{d}{a}}{1+\bar{\lambda}\dfrac{a}{d}z}=e^{i\theta}\frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0z},$$

其中 θ 是实数, z_0 是满足 $|z_0|<1$ 的复数.

总之, 我们证明了:

命题 6.2 单位圆盘的自同构群由下列形状的单应变换所组成:

$$z'=e^{i\theta}\frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0z},\quad \theta\text{是实数},\quad |z_0|<1. \tag{6.5}$$

§3. 保形表示的基本定理

1. 基本定理的叙述

我们提出下列问题: 已给平面 $\mathbf{C}$ 上的一个开集 D, 求 D 到单位圆盘 $|z|<1$ 上的所有同构 (如果有同构的话). 这种同构存在的一个必要条件如下:

D 必须是单连通的, 并且不是 $\mathbf{C}$.

因为 D 必须与单连通的开圆盘同胚, 所以上述第一个条件是必要的. 由于 §2 第 1 段中定理 1, 条件 $D\neq\mathbf{C}$ 是必要的. 下列基本定理断定这些必要条件也是充分的.

基本定理 平面 $\mathbf{C}$ 上不是 $\mathbf{C}$ 的任何单连通开集 D 与开圆盘 $|z|<1$ 同构.

第 3 及 4 段中将作出证明. 首先, 我们注意 D 到 $|z|<1$ 上的任何同构由一个特殊的同构以及单位圆盘的任一自同构组成. 由于单位圆盘的自同构成一传递群, 我们看出, 如果有一个 D 到单位圆盘上的同构, 那么有一个同构把任意选定的一点 $z_0\in D$ 变换为圆盘的心 O. 于是我们可对所求同构 f 加上条件

$$f(z_0)=0. \tag{1.1}$$

其次, 单位圆盘的心的稳定群由围绕 0 的旋转组成 (§2 命题 6.1), 因此可对同构 f 加上补充条件

$$f'(z_0)>0. \tag{1.2}$$

总之, 如果所求同构 f 存在, 条件 (1.1) 及 (1.2) 就完全确定了它.

现在立即叙述基本定理的两个系:

系 1 平面 $\mathbf{C}$ 上都不是 $\mathbf{C}$ 的两个单连通开集 D_1 及 D_2 同构.

我们注意到, 由于 §2 (第 1 段) 中定理 1, 任何不是 $\mathbf{C}$ 的单连通开集 D 不与 $\mathbf{C}$ 同构. 然而,

系 2 平面 $\mathbf{C}$ 上两个单连通开集 D_1 及 D_2 总是同胚的.

事实上, 如果 D_1 及 D_2 都不是 $\mathbf{C}$, 由系 1 即可推出结论. 如果两者中有一个等于 $\mathbf{C}$, 根据圆盘 $|z|<1$ 与平面 $\mathbf{C}$ 同胚可推出结论.

2. 化为有界区域情形

命题 2.1 设 D 是满足基本定理中假设的一个开集, 那么 D 到平面 $\mathbf{C}$ 的一个有界开集上有一同构.

事实上, 由假设, 存在着一点 $a \notin D$. 在 D 内, 考虑函数 $\log(z-a)$. 因为 D 是单连通的, 所以可选取它的一个分支 $g(z)$ (参考第二章 §1 第 7 段). 在 D 内全纯的函数 g 在 D 内是单叶的, 这是由于从关系式 $g(z_1)=g(z_2)$ 可推出

$$e^{g(z_1)}=e^{g(z_2)}, \quad \text{亦即} \quad z_1-a=z_2-a.$$

选取一点 $z_0 \in D$, 函数 g 在 D 内取心为 $g(z_0)$ 的一个圆盘 E 内所有值 (参看 §1 第 1 段). 如果把这圆盘平移 $2\pi i$, 那么由于函数 g 是单叶的, 我们得到一个圆盘, 其中任何点都不属于 D 在 g 下的像, 由此推出函数

$$\frac{1}{g(z)-g(z_0)-2\pi i}$$

在 D 内全纯、单叶并且有界. 因此它确定开集 D 到平面 $\mathbf{C}$ 的一个有界开集上的同构, 命题 2.1 得证.

此后我们假定 D 是有界的. 应用平移及位似变换, 可假定 $z_0=0$, 而且 D 含在圆盘 $|z|<1$ 内. 此后将经常作这些假设.

3. 一个极值性质

命题 3.1 设 A 是 D 内满足下列两条件的全纯单叶函数 f 的集:

$$f(0)=0, \quad \text{对于} z \in D, \quad |f(z)|<1. \tag{3.1}$$

为了使得在映射 f 下的像 D' 恰好是单位圆盘, 必须而且只需当 f 在 A 中变动时, $|f'(0)|$ 是可能取得的值中的最大值.

证明 1° 条件是必要的. 设 $f \in A$, 并且设 D' 是在 f 下的像. 设 g 是 D 到单位圆盘上的一个同构, 并且满足 $g(0)=0$. 我们有 $f=h\circ g$, 其中 h 是单位圆盘到映射 f 的像 D' 上的一个同构, 而且 $h(0)=0$. 由柯西不等式, 我们有 $|h'(0)|\leqslant 1$, 而且等式只有在 h 是单位圆盘的一个自同构时才能达到. 因此

$$|f'(0)|\leqslant|g'(0)|.$$

2° 条件是充分的. 为了看出这一点, 我们要证明, 如果 $f \in A$, 并且如果有一点 a (而 $|a| < 1$) 不属于映射 f 下的像, 那么存在着一个 $g \in A$, 使得

$$|g'(0)| > |f'(0)|.$$

为此, 先考虑函数

$$F(z) = \log \frac{f(z) - a}{1 - \bar{a} f(z)}; \tag{3.2}$$

它在 D 内全纯并且单叶. $f(z)$ 的值在单位圆盘内, 因此 $\dfrac{f(z) - a}{1 - \bar{a} f(z)}$ 的值也在单位圆盘内 (参看 §2, 命题 6.2), 从而函数 $F(z)$ 的实部 < 0. 当然, 我们已选取对数的一支作为 $F(z)$, 而由于 D 是单连通的, 这是可能的. 考虑函数

$$g(z) = \frac{F(z) - F(0)}{F(z) + \overline{F(0)}}, \tag{3.3}$$

它在 D 内全纯并且单叶. 我们有 $g(0) = 0$, 而且由下列引理, $|g(z)| < 1$.

引理 *如果两复数 u 及 v 满足 $\mathrm{Re}(u) < 0$ 以及 $\mathrm{Re}(v) < 0$, 那么* $\left|\dfrac{v - u}{v + \bar{u}}\right| < 1$. (请读者作出证明.)

于是函数 g 属于命题 3.1 叙述中的集 A. 计算 g 在原点的导数:

$$g'(0) = \frac{F'(0)}{F(0) + \overline{F(0)}}, \quad 其中\ F'(0) = (\bar{a} - \frac{1}{a}) f'(0). \tag{3.4}$$

因此我们有

$$\frac{|g'(0)|}{|f'(0)|} = \frac{1 - a\bar{a}}{2 |a| \log |\dfrac{1}{a}|}. \tag{3.5}$$

而为了证明 $|g'(0)| > |f'(0)|$, 只需证明不等式

$$\frac{1 - t^2}{t} - 2 \log \frac{1}{t} > 0, 对于 0 < t < 1. \tag{3.6}$$

这一证明是初等的: 上列不等式左边是 t 的函数, 其导数 < 0, 因此它在区间 $0 < t \leqslant 1$ 中是严格递减的. 又因它在 $t = 1$ 时为 0, 所以对于 $0 < t < 1$, 它 > 0.

这样, 我们完成了命题 3.1 的证明.

4. 基本定理的证明

考虑到命题 3.1, 我们只需证明存在着函数 $f \in A$, 对于它, $|f'(0)|$ 达到上确界.

设 B 是 A 中满足 $|f'(0)| \geqslant 1$ 的 f 之集. 因为函数 $f(z) = z$ 属于集 B, 所以集 B 不是空的. 集 B 是向量空间 $\mathscr{H}(D)$ 中一个有界集 (参看第五章 §4 第 1 段). 事实上, 对于任何 $z \in D$ 以及任何函数 $f \in B$, 我们有 $|f(z)| < 1$. 我们要证明, 集 B 是

$\mathscr{H}(D)$ 的一个闭子集. 设 f 是在 D 内全纯的一个函数, 是函数 $f_n \in B$ 的序列 (在 D 内任何紧集上) 的一致极限. 我们有

$$f(0) = \lim\ f_n(0) = 0.$$

而且由于导数 f' 是导数 f'_n 在任何紧集上的一致极限, 取极限即得 $|f'(0)| = \lim\limits_n |f'_n(0)| \geqslant 1$. 因此函数 f 在 D 内不是常数. 但 f 是单叶函数 f_n 的极限, 由此推出 f 是单叶的 (参看第五章 §1 命题 2.2). 既然对于任何 $z \in D, |f_n(z)| < 1$, 我们有极限 $|f(z)| \leqslant 1$. 但考虑到 f 不是常数这一事实, 由最大模原理, 在一点 $z \in D$, 不可能有 $|f(z)| = 1$. 总之, 我们恰好证明了函数 f 满足集 B 中的函数所应满足的一切条件. 换句话说, $f \in B$, 这就证明集 B 在 $\mathscr{H}(D)$ 中是闭的.

这样, 集 B 是 $\mathscr{H}(D)$ 中的一个有界闭子集. 由第五章 §4 第 2 段中的基本定理, 集 B 是紧的. 可是由第五章 §1 第 2 段的定理 2, 使每个 $f \in B$ 对应着实数 $|f'(0)|$ 的映射是一连续映射. 因此在紧空间上连续的这一函数达到它的上确界, 基本定理证完.

§4. 解析空间概念, 微分形式的积分

1. 解析空间的结构

设 X 是分离拓扑空间. 我们假定给出了一组开覆盖 $(U_i)_{i\in I}$, 并且对于每个 U_i, 在 U_i 内确定了一个复值函数 z_i, 它实现 U_i 到平面$\mathbf{C}$中开集 A_i 上的一个同胚. 对于这些函数还加上下列结合条件:

(1.1) 对于满足 $U_i \cap U_j \neq \varnothing$ 的任何 $i \in I$ 及 $j \in I$, 像 $z_j(U_i \cap U_j) \subset A_j$ 在像 $z_i(U_i \cap U_j) \subset A_i$ 上的映射 $f_{ij} = z_i \circ (z_j)^{-1}$ 是一全纯变换, 其导数到处 $\neq 0$. 换句话说, 在 $U_i \cap U_j$ 内, 我们有 $z_i = f_{ij}(z_j)$, 其中 f_{ij} 在$\mathbf{C}$ 中开集 $z_j(U_i \cap U_j)$ 内全纯 (且其导数 $\neq 0$).

作为定义, 给出开覆盖及满足条件 (1.1) 的函数 z_i, 就是在 X 上确定了一个**解析空间结构**. 函数 z_i 称为开集 U_i 内的**局部坐标**. 如果 X 中一点属于多个开集, 在这点的邻域内有多个局部坐标 (在每个开集中有一局部坐标). 根据结合条件 (1.1), 通过全纯变换 f_{ij}, 可从一个局部坐标 z_j 变到另一个局部坐标 z_i.

作为例子, 我们过去确定黎曼球面时 (第三章 §5 第 1 段) 正是这样做的. 这时 X 是空间 $\mathbf{R}^3$ 中的单位球面, 覆盖是由两个开集组成, 其中每一个是球面上一个极点的余集.

全纯函数的定义 设 X 是有解析空间结构的一个空间. 设 f 是在 X 上确定的连续复值函数. 对于每个 i, 设 f_i 是在开集 $A_i \subset \mathbf{C}$ 内确定的函数, 它由下列条件确定: 在 U_i 内, $f = f_i \circ z_i$. 如果对于每个 i, 函数 f_i 在开集 A_i 内是全纯的, 那么我们说 f 是**全纯的**. 换句话说, 如果在每个开集 U_i 内, f 可表示为局部坐标 z_i 的全纯函数, 那么 f 在 X 内是全纯的.

2. 全纯映射, 导出结构

定义 设 X 及 Y 是两空间, 其中每一个有一解析空间结构. 我们说映射 $\varphi : X \to Y$ 是一**全纯映射**, 如果它是连续的, 并且还满足下列条件: 对于任何点 $a \in X$, 设 $b = \varphi(a)$, 并且设 w 是空间 Y 中 b 点的邻域内的一个局部坐标, 那么 $w \circ \varphi$ 必须是在 X 中点 a 的邻域内全纯的一个函数.

上述条件表明: $w \circ \varphi$ 可表示为在 X 中点 a 的邻域内一个局部坐标的全纯函数. 这样, 设已给连续映射 φ, 如果在每点 $a \in X$ 的邻域内, 变换得出的点 $b = \varphi(a)$ 的邻域内的一个局部坐标,是 a 的邻域内的一个局部坐标的全纯函数, 那么我们说连续映射 φ 是全纯的. 根据结合条件 (1.1), 上述条件和局部坐标的选取无关.

设 X,Y 及 Z 是三个解析空间, 并且设 $\varphi : X \to Y, \psi : Y \to Z$ 是两个全纯映射. 那么复合映射 $\psi \circ \varphi$ 是 X 到 Z 的全纯映射. 证明请读者作出.

设 X 及 Y 是两个解析空间. 如果一个同胚 $\varphi : X \to Y$ 及逆同胚 φ^{-1} 都是全纯的, 那么 φ 称为 X 到 Y 上的一个**同构**. 实际上, 我们将要看到 (命题 6.1) , 如果 φ 是一个全纯**同胚**, 它的逆映射必然是全纯的, 因而 φ 是一个同构.

在同一拓扑空间 X 上考虑两种解析空间结构: 第一种结构由开覆盖 (U_i) 及局部坐标 z_i 所确定, 第二种由开覆盖 (V_α) 及局部坐标 w_α 所确定. 试问恒等映射 $X \to X$ 是否是第一种解析空间结构到第二种上的一个同构? 回到定义, 我们立即看出, 必要与充分条件如下: 对于任何点 $a \in X$, 对于点 a 邻域中第一种结构的任何局部坐标 z_i, 以及对于点 a 邻域中第二种结构的任何局部坐标 w_α, w_α 可表示为 z_i的全纯函数, 而且反之, z_i 可表示为 w_α 的全纯函数. 这条件还可表述如下:

考虑由所有 U_i 及所有 V_α 所形成的 X 的开覆盖以及由 z_i 及 w_α 所形成的局部坐标, 那么所求的条件是这一开覆盖及这些局部坐标满足结合条件 (1.1). 换句话说, 上述开覆盖及局部坐标必须在 X 上确定一个解析空间结构 (这结构与 U_i 及 z_i 所确定的结构同构, 也与 V_α 及 w_α 所确定的结构同构). 当 X 上两种解析空间结构满足上述条件时, 我们说它们是**等价的**. 给出一个分离拓扑空间 X, 以及 X 上一类两两等价的解析结构, 称为一个**解析空间**.

定义 设 X 是一空间, 并且带有 U_i 及 z_i 所确定的解析空间结构. 设 U 是 X 中一个开集, 开集 $U \cap U_i$以及函数 z_i 在 $U \cap U_i$ 的限制所确定的结构, 称为 X 的解析结构在 U 上的**导出解析结构**. 换句话说, 如果 $a \in U$, 那么对于导出结构, a 的邻域内的一个局部坐标, 就是对于 X 上的已给结构, a 的邻域内的一个局部坐标. 这样, 一个解析空间 X 中的任何开集 U 自动有一个解析空间结构.

3. 解析空间的实例

考虑复变量 z 的平面 $\mathbf{C}$. 取一个开集 $\mathbf{C}$ 所形成的覆盖, 而 z 是 $\mathbf{C}$ 中的局部坐标. 由于这时结合条件 (1.1) 显然成立, 这样就在 $\mathbf{C}$ 上确定了一个解析空间结构. 按

照第 2 段的末尾, 任何开集 $D \subset \mathbf{C}$ 有一解析空间结构. 按照这样的定义, 解析空间 D 内的全纯函数, 就是我们经常所说的 D 内的全纯函数.

取已讲过的 (第三章 §5 第 1 段) 黎曼球面作为解析空间的第二个实例.

设 $\mathbf{Z}$ 是平面 $\mathbf{C}$ 上坐标为整数的实点的加法子群. 现在考虑商空间 $\mathbf{C}/\mathbf{Z}$. 因此 $\mathbf{C}/\mathbf{Z}$ 中一点是相互差为整数的点所形成的一个等价类. 按照拓扑学中的一般定义, 在 $\mathbf{C}/\mathbf{Z}$ 中引入 $\mathbf{C}$ 中拓扑的*商拓扑*: 如果 $\mathbf{C}/\mathbf{Z}$ 中一个集 (对于标准映射 $\mathbf{C} \to \mathbf{C}/\mathbf{Z}$) 在 $\mathbf{C}$ 中的逆像是 $\mathbf{C}$ 中的开集, 那么 $\mathbf{C}/\mathbf{Z}$ 中的这个集是*开的*. 这就是说, $\mathbf{C}/\mathbf{Z}$ 中的开集是 $\mathbf{C}$ 中开集在典型映射 $\mathbf{C} \to \mathbf{C}/\mathbf{Z}$ 下的像.

容易证明, $\mathbf{C}/\mathbf{Z}$ 中的拓扑是分离的. 为了在 $X = \mathbf{C}/\mathbf{Z}$ 上确定一个解析空间结构, 考虑 $\mathbf{C}$ 中充分小的开集 V , 使得典型映射 $p: \mathbf{C} \to X$ 在 V 上的限制是单射 (例如直径 < 1 的开集 V). 用 z 表示平面 $\mathbf{C}$ 上的坐标, 考虑 X 中的开集 $U = p(V)$ 以及这开集中定义的函数 $z \circ p^{-1}$ 所形成的二元组合. 我们要证明这些二元组合在 X 上确定了一个解析空间结构.

只需验证结合条件就够了. 于是设 V_1 及 V_2 是 $\mathbf{C}$ 上两个足够小的开集, 它们的像 $U_1 = p(V_1)$ 及 $U_2 = p(V_2)$ 彼此相交, 把 p_i 记作 p 在 V_i 的限制 $(i = 1, 2)$, 并且令

$$V_i' = (p_i)^{-1}(U_1 \cap U_2) \subset V_i (i = 1, 2).$$

结合条件表明: V_2' 在 V_1' 上的映射 $f_{12} = p_1^{-1} \circ p_2$ 是全纯的, 并且它的导数 $\neq 0$. 然而情况确实是这样, 这是因为如果 $z \in V_2'$, $f_{12}(z)$ 及 z 在 $\mathbf{C}/\mathbf{Z}$ 中有相同的像, 从而在 V_2' 中每点的邻域内, $f_{12}(z) - z$ 是一整 (常) 数.

我们还有解析空间的另一实例. 与第五章 §2 第 5 段中一样, 设 e_1 及 e_2 是 $\mathbf{C}$ 中比值不为实数的两向量, 考虑 $\mathbf{C}$ 中以向量系 e_1 及 e_2 为基的一个离散子群 Ω. 设 X 是商空间 $\mathbf{C}/\Omega$, 并且带有 $\mathbf{C}$ 中拓扑的商拓扑, X 中的开集是 $\mathbf{C}$ 中开集在标准映射 $p: \mathbf{C} \to \mathbf{C}/\Omega$ 下的像. X 的拓扑是分离的, 它的解析空间结构恰好与上例中一样确定. 可是在这里,空间 $X = \mathbf{C}/\Omega$ *是紧的*. 事实上, 考虑一个闭的周期平行四边形, 设为 $P.P$ 是 $\mathbf{C}$ 中一个紧子集, 从而它在 p 下的像是 X 中的紧子集. 可是这像就是整个 X, 于是 X 是紧的. 这样, 除了已知的黎曼球面的例子外, 我们又有了一个紧解析空间的实例.

4. 解析开拓原理, 最大模原理

解析开拓原理 (第一章 §4 第 3 段, 系 2) 可推广到解析空间上的全纯函数, 而且更一般地推广到解析空间 X 到解析空间 X' 的全纯映射. 准确地说, 设 D 是解析空间 X 中的一个非空开集, 并设为*连通的*. 如果从 X 到 X' 的两个全纯映射 f 及 g 在 D 内相等, 那么它们在 X 中*到处*相等. 为了证明这一结果, 显然只需证明:

命题 4.1 *设 f 及 g 是解析空间 X 到解析空间 X' 的两个全纯映射, 设 U 是 X 中这样的点所形成的集: 在这些点的邻域中, f 及 g 相等, 那么集 U 既是开的,*

又是闭的.

证明 由其定义, U 是开的, 因此只需证明 U 是闭的. 设 X 中一点 a 属于 U 的闭包. 由于 f 及 g 是连续的, 并且在 U 内相等, 我们有 $f(a)=g(a)$. 在X 中 a 的邻域内, 取在点 a 为零的局部坐标 z ; 在 X' 中 $f(a)$ 的邻域内, 也取一局部坐标 w . 在 a 的邻域内, $w\circ f$ 及 $w\circ g$ 表示为 $z=0$ 的邻域 V 内全纯的函数 $\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$. 设在 $z\in V$ 的邻域内, φ 及 ψ 相等. 由经典的解析开拓原理, 这样的 $z\in V$ 所成的集 E 是闭的. 由于点 $z=0$ 属于 E 的闭包, 我们有 $0\in E$, 因此 φ 及 ψ 在 0 的邻域内相等, 从而 f 及 g 在点 $a\in X$ 的邻域内相等, 证完.

命题 4.2 *设 f 是解析空间 X 上的全纯函数, 并设 X 是连通的. 如果 $|f|$ 在一点 $a\in X$ 有相对极大值, 那么函数 f 是常数* (最大模原理).

证明 考虑 a 的邻域内的一个局部坐标 z. 在 a 的邻域内, 函数 f 可表示为 z 的全纯函数. 由于 $|f|$ 在点 a 有相对极大值, 根据经典的最大模原理 (参看第三章 §2 第 2 段, 定理 1) , f 在点 a 的邻域内是常数. 于是由通常的推理可以看出, X 中 f 取值 $f(a)$ 的点所成的集同时是开的及闭的. 由于 X 是连通的, 上述集是整个 X. 证完.

系 *如果 X 是紧连通解析空间, 那么在 X 上的任何全纯函数是常数.*

事实上, $|f|$ 是在一个紧空间上的连续函数, 因此达到它的上确界. 由命题 4.2 , 函数 f 在 X 上是常数.

例 黎曼球面 S_2 及空间 $\mathbf{C}/\Omega$ (参看第 3 段) 是紧连通解析空间. 因此在其中一个空间上全纯的任何函数是常数. 如果我们注意到, 在$\mathbf{C}/\Omega$ 上的全纯函数, 及 $\mathbf{C}$ 上以 Ω 中的点为周期的全纯函数之间, 映射 $f\to f\circ p$ 建立了一种双射对应, 那么我们又得到了已用其他方法证明了的一个结果: *在 $\mathbf{C}$ 上全纯且为双周期的任何函数是常数* (参看第三章 §5 第 5 段, 命题 5.1 的系).

5. 解析空间上的亚纯函数

定义 设 X 是一解析空间. 从 X 到黎曼球面 S_2 的全纯映射称为 X 上的**亚纯函数**. 因此亚纯函数就是可取值 ∞ 的一个连续函数, 而且在每点 $a\in X$ 的邻域内, 可以把这函数表示为 a 的邻域内一个局部坐标的亚纯函数.

重新设 Ω 是 $\mathbf{C}$ 中由比值不是实数的两元素 e_1 及 e_2 所产生的离散子群. 在解析空间 $\mathbf{C}/\Omega$ 上的亚纯函数与 $\mathbf{C}$ 上以 Ω 为周期系的亚纯函数之间, 标准映射 $\mathbf{C}\to\mathbf{C}/\Omega$ 显然建立了一种双射对应.

6. 全纯映射的分支指标

设 $\varphi: X\to Y$ 是解析空间 X 到解析空间 Y 的一个全纯映射, 并且设 a 是 X

中一点. 设 z 是 X 中 a 的邻域内的一个局部坐标, 并且设 w 是 Y 中 $b=\varphi(a)$ 的邻域内的一个局部坐标. 既然 φ 是全纯的, 对于邻近 a 的 x , $w(\varphi(x))$ 可表示为局部坐标 z 的全纯函数 $f(z)$. 为了明确概念, 假定 z 在点 a 为零, w 在点 b 为零.

设 p 是方程 $f(z)=0$ 的根 0 的重数. 容易看出, 这一整数 p 既与 a 的邻域内局部坐标 z 的选取无关, 又与 b 的邻域内局部坐标 w 的选取无关. 事实上, 局部坐标的改变是用导数 $\neq 0$ 的全纯函数作出的.

这样确定的整数 p 称为映射 $\varphi: X \to Y$ 在点 $a \in X$ 的**分支指标**. 由 §1 (第 1 及 2 段), 如果 p 是分支指标, 那么存在着 a 的邻域内一个局部坐标 z , 以及 b 的邻域内一个局部坐标 w, 使得借助这些局部坐标, 变换 φ 可用关系式 $w=z^p$ 表示出来. 反过来说, 如果情况是这样, 在点 a 的分支指标等于 p.

我们看出, 在 a 的邻域内, 函数 φ 取 Y 中与 b 充分接近且异于 b 的每个值恰好 p 次. 特别,为了使得 φ 在 a 的充分小的邻域的限制是这邻域在它的像上的同胚 (换句话说, 为了使得 φ 在 a 的邻域内局部单叶), 必须而且只需分支指标 p 等于 1. 这时我们说映射 φ 在点 a 无分支.

命题 6.1 解析空间 X 在解析空间 Y 上的任何全纯单叶映射是一同构.

事实上, 根据以上所讲的, 在任何点 $a \in X$, 分支指标必须等于 1. 如果 $b=\varphi(a)$, 那么把 a 的邻域内的局部坐标 z, 表示为 b 的邻域内的局部坐标 w 的全纯函数, 就得到 b 的邻域内的逆映射 φ^{-1} . 命题得证.

例 考虑映射 $z \to e^{2\pi i z}$, 它是加法群 $\mathbf{C}$ 到不等于 0 的复数之乘法群 $\mathbf{C}^*$ 上的一个全纯映射. 转到商群, 它导出解析空间 $\mathbf{C}/\mathbf{Z}$ 到 $\mathbf{C}^*$ 上的一个全纯映射 φ. 显然, 映射 φ 是全纯的及单叶的. 由此推出, φ 是 $\mathbf{C}/\mathbf{Z}$ 在 $\mathbf{C}^*$ 上的一个同构. 事实上, 如我们在第一章 §3 中所已看到, 这也是拓扑群 $\mathbf{C}/\mathbf{Z}$ 及 $\mathbf{C}^*$ 的一个同构.

7. 保形表示的基本定理

在这里我们叙述一个定理, 但不作证明. 这定理把 §3 中对于平面 $\mathbf{C}$ 上开集叙述并证明了的定理推广到解析空间情形.

基本定理 任何单连通解析空间 X 与下列三空间之一同构:

1° 黎曼球面 S_2;

2° 平面 $\mathbf{C}$;

3° 单位圆盘 $|z|<1$.

这定理的证明太难了, 以至在这里不能作出证明. 我们注意到, 在上列三个解析空间中, 只有第一个 S_2 是紧的. 由此推得:

系 任何单连通紧解析空间与黎曼球面同构. 任何单连通非紧解析空间与平面 $\mathbf{C}$ 或单位圆盘同构 (两种情形不能同时成立).

8. 微分形式的积分与留数定理

解析空间 X 上全纯微分形式的定义: 这种形式确定如下: 在具有局部坐标 z_i 的每个开集 U_i 内, 给出一个全纯微分形式

$$\omega_i = f_i(z_i)dz_i,$$

其中 f_i 是开集 $A_i \subset \mathbf{C}$ 内的全纯函数, 而 A_i 是 U_i 在局部坐标 z_i 下的像. 设给出的这些 ω_i 还满足下列结合条件: 如果 z_i 及 z_j 是同一点 $a \in X$ 的邻域内两个局部坐标, 微分形式 ω_j 可由微分 ω_i 通过下列变量代换得出:

$$z_i = f_{ij}(z_j), \tag{8.1}$$

这里变换 (8.1) 把局部坐标 z_i 表示为局部坐标 z_j 的函数. 换句话说, 我们一定有关系式

$$f_j(z_j) = f_i(f_{ij}(z_j))f'_{ij}(z_j). \tag{8.2}$$

现不作证明, 迅速指出怎样把平面 $\mathbf{C}$ 上开集内的全纯微分形式理论, 推广到这里所考虑的解析空间上全纯微分形式情形.

设 ω 是解析空间 X 上的一个全纯微分形式. 在 X 中每点的邻域内, 有 ω 的一个原函数, 这就是说, 有一全纯函数 g, 使得 $dg = \omega$. 除去相差一常数外, 这样的原函数是确定的. ω 的原函数在大范围内的存在性没有得到保证, 可是如果空间 X 是单连通的, X 上的任何全纯微分形式有原函数. 在 X 不是单连通的一般情形, ω 沿 X 中一条闭道路的积分不一定总是零. 对于两条同伦的闭道路 (在第二章 §1 第 6 段中意义下), 这种积分有相同的值. 沿一条这样的闭道路的积分之值, 称为积分 $\int \omega$ 的一个周期.

设 X 是一解析空间, 在 X 中每点 a 的邻域内, 有方向的概念. 这是因为 a 的邻域内每个局部坐标确定 a 的邻域到平面 $\mathbf{C}$ 中一个开集上的一个同胚, 而后一开集自然是有方向的. 由于局部坐标的变换可用全纯变换表示, a 的邻域内两局部坐标恰好确定同一方向. 由此容易导出 X 中 "一个紧集的有向边界" 概念. 如果 Γ 是一紧集的有向边界, 那么对于任何全纯微分形式 ω , 积分 $\int_\Gamma \omega$ 为零.

现在来确定一个全纯微分形式的留数概念. 设 E 是解析空间 X 的一个离散闭子集 (因此 E 是由孤立点组成的), 并且设 ω 是 E 的余集内的一个全纯微分形式. 设 a 是 E 中一点, 并且设 z 是 a 的邻域内的一个局部坐标, 还设 z 在点 a 为零. 在 a 的邻域内, 把形式 ω 写作 $f(z)dz$, 其中 f 在 0 的邻域内 (可能除去 $z=0$) 全纯. $f(z)$ 的洛朗展式表明, 在 a 的邻域内, 形式 ω 可写作

$$\omega = \omega_1 + \left(\frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \cdots\right)dz, \tag{8.3}$$

其中 ω_1 是在 a 的邻域内 (包括 a) 全纯的微分形式. 设 γ 是 a 的一个小邻域内的闭道路, 它不经过 a , 并且它关于 a 的指标等于 1 (考虑 a 的邻域在局部坐标下的

像, 可确定闭道路的指标). 于是经典的留数定理表明, 我们有

$$\int_\gamma \omega = 2\pi i c_1. \tag{8.4}$$

这样, (8.3) 右边出现的系数 c_1 , 与在点 a 为零的局部坐标 z 的选择无关. 我们把 c_1 称为微分形式 ω 在点 a 的留数.

留数定理 如果紧集 K 的有向边界 Γ 不含离散闭集 E 中任何点, 而在 E 的余集内, 微分形式 ω 全纯, 那么积分 $\int_\Gamma \omega$ 等于 ω 在 K 内属于 E 的点的留数之和与 $2\pi i$ 的乘积.

§5. 黎曼面

1. 定义

定义 设 Y 是一解析空间. 一个连通解析空间 X 及一个非常数全纯映射 $\varphi: X \to Y$ 合称为**展开在 Y 上的黎曼面** (或简称 Y **上的黎曼面**).

我们最经常考虑的是 Y 为复变量的平面 $\mathbf{C}$ 或黎曼球面 S_2 的情形. 换句话说, 这些是展开在平面上或球面上的黎曼面.

在 §4 第 6 段中, 我们已经看到, 映射 φ 在任一点 $a \in X$ 的邻域内的作用: 如果 φ 的分支指标在点 a 等于 1, 那么 φ 确定 a 的邻域到 $\varphi(a)$ 的邻域上的一个同胚; 如果 φ 的分支指标在点 a 等于整数 $p > 1, a$ 的一个小邻域在映射 φ 下的像覆盖 $\varphi(a)$ 的一个邻域 p 次. φ 的分支点 (在该处分支指标 > 1 的点) 是 X 的孤立点. 在所有情形下, 映射 φ 是一开映射, Y 中一点的逆像是 X 中的一个离散子集.

当然, 即令没有分支点, 映射 φ 也不一定是单射. 而且当有分支点时, 分支点的 (离散) 集在 φ 下的像不一定是 Y 的离散子集, 甚至于 X 中无穷个不同分支点在 Y 中可能有相同的像.

定义 已给黎曼面 (X, φ) , 其中映射 φ 是无分支点的, 亦即它在 X 中每一点的分支指标等于 1 , 那么 (X, φ) 称为 Y 上**无分支点的黎曼面**. 为了确定 Y 上一个无分支点的黎曼面, 只需给出一个分离拓扑空间 X 以及一个从 X 到 Y 的连续映射 φ, 使得 φ 局部为一同胚.(这就是说, X 中任何点有一开邻域 V , 使得 φ 在 V 中的限制是 V 到它的像 $\varphi(V)$ 上的一个同胚.) 事实上, 这时在 X 中每点的邻域内, 映射 φ 确定一个局部坐标. 于是 X 具有一个解析空间结构, 并且显然这时映射 φ 是 X 到 Y 的一个全纯映射.

Y 上无分支点的黎曼面的一个特殊情形是 Y 的覆盖空间.

定义 满足下列条件的无分支点的黎曼面 (X, φ) 称为 Y 的**覆盖空间:**

对于任何点 $b \in Y$，在 Y 中有 b 的一个开邻域 V，使得逆像 $\varphi^{-1}(V)$ 由 X 中互不相交的开集 U_i 所组成，其中每一开集可由映射 φ 同胚映射到 V 上.

例　取 $Y = \mathbf{C}^*$ 为平面 $\mathbf{C}$ 中 $\{0\}$ 的余集. 取 $X = \mathbf{C}$, 并且设 $z = e^t$ 是 X 到 Y 的映射 φ. 这一映射把 X 确定为 Y 的覆盖. 事实上, 设 b 是一复数 $\neq 0$. 取心为 b, 半径 $<|b|$ 的一个开圆盘作为 V. $\log z$ 在 V 内的每一分支是一个这样的函数, 它确定 V 到平面 $\mathbf{C}$ 中开集 U_i 上的一个同胚. 这些开集 U_i 两两不相交, 它们的并集是 $\varphi^{-1}(V)$，而且 φ 在每个 U_i 的限制是 U_i 到 V 上的一个同胚.

在上例中, 空间 $Y = \mathbf{C}^*$ 不是单连通的, 但是它的覆盖 $\mathbf{C}$ 是单连通的. 于是我们有了这样一个例子: 一个连通但非单连通的空间有一单连通覆盖. 现叙述下列定理, 但不作证明:

定理　平面 $\mathbf{C}$ 中任何连通开集 (或更一般地, 任何连通解析空间 Y) 有一单连通覆盖.

2. 黎曼面上的全纯函数及全纯微分形式

定义　已给 Y 上的一个黎曼面 (X, φ). 作为定义, 在这黎曼面上的**全纯** (或**亚纯**) **函数**, 就是在解析空间 X 上的全纯 (或亚纯) 函数. 我们同样对黎曼面上全纯微分形式下定义.

例如考虑第一段末尾所讨论的黎曼面: $X = \mathbf{C}$ (复变量称为 t), $Y = \mathbf{C}^*$ (不等于 0 的复变量称为 z), 而映射 φ 由 $z = e^t$ 确定. 既然映射 φ 是无分支点的. 在 X 中每点 a 的邻域内, 可取函数 $e^t = z$ 作为局部坐标. 于是黎曼面上的任何全纯函数 f 可局部地表示为 z 的全纯函数. 但因 X 中不同的点可由 φ 映射为 Y 中同一点, 所以一般说来, f 不是变量 $z \neq 0$ 的大范围 (单值) 全纯函数. 特别, t 是 X 上的全纯函数, 在 X 中每一点的邻域内, t 是 $\log z$的一个分支. 但把 $\log z$ 看作 z 在 $\mathbf{C}^*$ 上的函数, 它却不是一个单值函数. 我们可以说, 在这种情形下, 考虑覆盖 $\varphi: X \to Y$ 是用来使函数 $\log z$ 成为单值的: 我们把它看作 $\mathbf{C}^*$ 的单连通覆盖空间 (X, φ) 上的函数, 而不是把它看作 $\mathbf{C}^*$ 上的函数.

现在我们研究另一实例, 它可表明我们怎样想到引进适当的黎曼面使一个多值函数 (不讨论一般情形)"成为单值的". 在平面 $\mathbf{C}$ 考虑多值函数

$$y = (1 - x^3)^{1/3}.$$

在异于 1, j 及 j^2 (1 的立方根) 的每点 x, y 有三个不同的值. 如果 x 取 1, j 及 j^2 三值中之一值, y 的三个值重合成一个值, 即零.

现在来确定一个解析空间 X 及一个全纯映射 $\varphi: X \to \mathbf{C}$. 在复数对 (x, y) 所组成的乘积 $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$ 内, 考虑满足下列条件的数对所组成的子集 X:

$$x^3 + y^3 = 1. \tag{2.1}$$

对 X 赋以乘积 $\mathbf{C}\times\mathbf{C}$ 的拓扑所导出的拓扑, 于是 X 是一隔离拓扑空间. 在 X 上, 考虑两个函数, 记作 x 及 y : 即点 (x,y) 的第一个及第二个坐标. 为了在 X 上确定一个解析空间结构, 在 X 中每点的邻域内, 选择一个 "局部坐标". 先设点 (x_0,y_0) 满足 $y_0\neq 0$ (从而 $x_0\neq 1,j,j^2$), 于是取 x 作为局部坐标. 这种取法是合理的, 因为函数 x 确定点 (x_0,y_0) 的一个邻域 (在 X 中) 到 x_0 的一个邻域 (在 $\mathbf{C}$ 中) 上的一个同胚: 逆同胚使得 (与 x_0 邻近的) x 与数对 (x,y) 相对应, 在这里 $y=(1-x^3)^{1/3}$, 而所取分支是在 $x=x_0$ 时等于 $y_0=0$ 的一支. 现设 (x_0,y_0) 是 X 中一点, 而且 $y_0=0$, 那么 $x_0\neq 0$ (实际上, x_0 是 1, j , j^2 三数中的一数), 这时取 y 作为局部坐标. 与上述理由类似 (只需交换 x 及 y 的地位), 这种取法是合理的. 还必须证明: 这样确定的局部坐标恰好满足所需要的结合条件[§4 中条件 (1.1)]. 换句话说, 必须证明: 在一点 $(x_0,y_0)\in X$ 的邻域中 (这里 $x_0\neq 0, y_0\neq 0$) , 关系式 (2.1) 确定局部坐标 y 为局部坐标 x 的全纯函数, 反过来也是这样. 这是由于 $(1-x^3)^{1/3}$ 有一全纯分支在 $x=x_0$ 时等于 y_0. 同样 $(1-y^3)^{1/3}$ 有一全纯分支在 $y=y_0$ 时等于 x_0.

这样, 我们就赋予了拓扑空间 X 一个解析空间结构. 对于这种结构, 函数 x 及 y 中的每一个是 X 上的全纯函数. 现对于 x 来证明这一点: 由于 x 是局部坐标, 在满足 $y_0\neq 0$ 的一点 (x_0,y_0) , 上述结果是明显的. 在满足 $y_0=0$ 的一点 (x_0,y_0) , y 是局部坐标, $x=(1-y^3)^{1/3}$ 是 y 的全纯函数.

取函数 x 作为映射 $\varphi: X\to\mathbf{C}$. 这时 (X,φ) 是 $\mathbf{C}$ 上的一个黎曼面. 这就是我们要确定的黎曼面. 在这黎曼面上, $y=(1-x^3)^{1/3}$ 正好是一个 (单值) 全纯函数. 我们注意到, 在每点 $x\in\mathbf{C}$ 上, 黎曼面 X 有三点: 即满足 $y=(1-x^3)^{1/3}$ 的三点 (x,y). 我们说这黎曼面有三 "叶". 但是如果 x 是 $\mathbf{C}$ 上 1, j, j^2 三点中的一点, 上述三点重合.

现确定上述解析空间 X 上的一个全纯微分形式 ω 如下: 在满足 $y_0\neq 0$ 的一点 (x_0,y_0) 的邻域内, 取

$$\omega=\frac{dx}{y}.$$

在满足 $y_0=0$ 的一点 (x_0,y_0) 的邻域内 (这时 $x_0\neq 0$), 取

$$\omega=-\frac{y\,dy}{x^2}.$$

(如果 $x_0\neq 0, y_0\neq 0$, 那么从 (2.1) 所导出的关系式

$$x^2dx+y^2dy=0$$

出发, 可以推出微分形式的等式 $\dfrac{dx}{y}=-\dfrac{ydy}{x^2}$.) 可以说 ω 就是 $\mathbf{C}$ 上的微分形式

$$\frac{dx}{(1-x^3)^{1/3}}.$$

在 $\mathbf{C}$ 上引入黎曼面 (X,φ), 可使这一微分形式成为全纯的.

例　证明: 图 12 中平面 $\mathbf{C}$ 上的闭道路 γ，实际上是黎曼面上一条闭道路在映射 φ 下的像. 更准确地说, 在 X 上有三条闭道路都以 γ 为像. 求上述微分形式沿其中一条闭道路的积分, 可证明实积分 $\int_0^1 \dfrac{dx}{(1-x^3)^{1/3}}$ 等于 $\dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

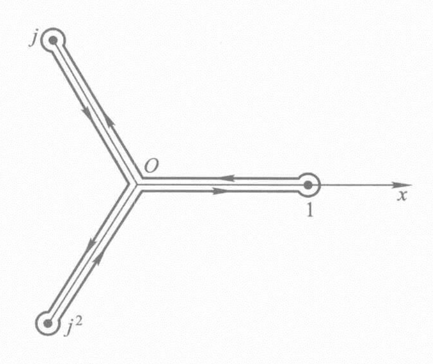


图 12

再考虑关系式 (2.1). 由这关系式可确定不是在 $\mathbf{C}$ 上, 而是在黎曼球面 S_2 上的黎曼面. 为此, 考虑复射影平面 $P_2(\mathbf{C})$, 即

$$\mathbf{C}\times\mathbf{C}\times\mathbf{C}-\{\,0,0,0\,\}$$

在下列等价关系下的商:

如果 x,y,z 与 x',y',z' 成比例, 就说 $(x,y,z)\sim(x',y',z')$ (我们说 (x,y,z) 是它所确定的 $P_2(\mathbf{C})$ 中的点的齐次坐标组, 亦即其等价类的齐次坐标组). $P_2(\mathbf{C})$ 中齐次坐标满足

$$x^3+y^3=z^3 \tag{2.2}$$

的点成一分离拓扑空间 X'. 上述空间 X 可看作 X' 的一个子空间: 与每点 $(x,y)\in X$ 相对应，取齐次坐标为 $(x,y,1)$ 的点. 空间 X' 是由空间 X 以及 3 个 “无穷远” 点组成的: 这 3 点的齐次坐标是 $(1,-1,0)$,$(j\ ,-1,0)$ 及 $(j^2\ ,-1,0\ )$. 请读者在 X' 上确定一个解析空间结构, 使其开拓 X 的解析空间结构 (只需在 X' 的三个无穷远点中每一点的邻域内, 确定一个局部坐标), 并且确定一个全纯映射 $\varphi':X'\to S_2$, 使其为开拓 φ . 可以证明: X' 是紧解析空间, y/z 是 X' 上的一个亚纯函数，它以三个无穷远点作为极点.

3. 与 “椭圆曲线” 相联系的黎曼面

考虑两个复变量 x 及 y 之间有下列形状的代数关系式:

$$y^2=4x^3-20a_2x-28a_4 \tag{3.1}$$

(我们有意采用与第五章 § 2 第 5 段中相同的记号). 假定选取 a_2 及 a_4 , 使得 (3.1) 右边的多项式有三个不同的根. 把这多项式记作 $P(x)$, 那么对于满足 $P(x)=0$ 的任何值 x, $P'(x)\neq 0$, 这里 P' 表示 P 的导数多项式.

现与 "椭圆代数曲线" (3.1) 相联系, 作 $\mathbf{C}$ 上的一个黎曼面 (X,φ) . 作为拓扑空间, X 是满足 (3.1) 的数对 (x,y) 所组成的 $\mathbf{C}\times\mathbf{C}$ 的子空间. 在这空间 X 上, 确定一个解析空间结构如下: 在满足 $y_0\neq 0$ 的一点 $(x_0,y_0)\in X$, 取 x 作为 "局部坐标". 在满足 $y_0=0$ 的一点 (x_0,y_0) , 我们有 $P'(x_0)\neq 0$, 从而由隐函数定理, 关系式 (3.1) 在 $(x_0,0)$ 的邻域内与形如 $x=f(y)$ 的一个关系式等价, 这里 f 在 0 的邻域内全纯, 并且 $f(0)=x_0$. 在这样一点 $(x_0,0)$ 的邻域内, 取 y 作为局部坐标.

映射 $\varphi: X\to\mathbf{C}$ 使 $x\in\mathbf{C}$ 与数对 (x,y) 相对应. 它显然是全纯的. 因此 (X,φ) 是 $\mathbf{C}$ 上的一个黎曼面. 它有两 "叶", 这是由于 x 的一个值对应着 y 的一般说来不相同的两个值 (如果 $P(x)\neq 0$, 这两值不相同). 另一方面, 函数 $X\to\mathbf{C}$ 使 y 与数对 (x,y) 相对应, 它也在 X 上全纯; 把它简单记作 y.

在满足 $y_0\neq 0$ 的点 $(x_0,y_0)\in X$ 的邻域内, 微分形式 ω 由 $\omega=dx/y$ 所确定; 而在点 $(x_0,0)\in X$ 的邻域内, 则由 $\omega=\dfrac{dy}{6x^2-10a_2}$ 所确定, 这是 X 上的一个全纯微分形式. 由于它是闭形式, 它在 X 中每点的邻域内有一原函数. 在大范围, 这原函数是一多值函数 z, 它在 X 中每点的邻域内全纯. 关系式 $dz=\omega$ 表明我们有

$$dx = y dz. \tag{3.2}$$

在每点 $(x_0,y_0)\in X$ 的邻域内, 函数 z 的每一分支是一局部坐标. 事实上, 如果 $y_0\neq 0$, x 是一局部坐标, 并且 $dz=\dfrac{1}{y}dx$; 如果 $y_0=0, y$ 是一局部坐标, 并且 $dz=\dfrac{dy}{6x^2-10a_2}$, 这里分母不为零.

现在补充黎曼面 (X,φ) , 使其成为黎曼球面 S_2 上的一个黎曼面 (X',φ'). 为此, 把复射影平面 $P_2(\mathbf{C})$ (参看第 2 段) 上一点的齐次坐标记作 (x,y,t), 并且考虑 $P_2(\mathbf{C})$ 中齐次坐标满足

$$y^2t = 4x^3 - 20a_2xt^2 - 28a_4t^3 \tag{3.3}$$

的点所成的集 X'. X' 是一分离拓扑空间. 如果对应于每点 $(x,y)\in X$, 取 X' 中齐次坐标为 $(x,y,1)$ 的点, 那么就可把 X 看作 X' 的一个子空间: 余集 $X'-X$ 只由一个 "无穷远" 点即齐次坐标为 (0,1,0) 的点组成. 在这点 (记作 ∞) 的邻域内, 可取 $x/y=x'$ 作为局部坐标, 这是因为 x' 确定点 ∞ 的一个邻域到 $\mathbf{C}$ 中点 0 的一个邻域上的同胚 (事实上, 令 $t/y=t'$, 关系式 (3.3) 等价于

$$t' = 4x'^3 - 20a_2x't'^2 - 28a_4t'^3.$$

在 $x'=0, t'=0$ 的邻域内, 由隐函数定理, t' 是 x' 的全纯函数:

$$t' = 4x'^3 - 320a_2x'^7 + \cdots). \tag{3.4}$$

在 ∞ 的邻域内选取了局部坐标 x' 后, 在 X' 上确定一个解析空间结构的工作就完成了 (请读者验证结合条件). 最后, 映射 φ' 确定为在 X 上等于 φ, 而且使 X' 中的点 ∞ 对应于 S_2 中的无穷远点.

上面确定的 X 上的全纯微分形式 ω, 也可开拓成为 X' 上的全纯微分形式: 在点 ∞ 的邻域内, 应用局部坐标 x' 以及由 (3.4) 所确定的 x' 的全纯函数 t', 令

$$\begin{aligned}\omega = t'd(x'/t') &= dx' - x'\ \frac{dt'}{t'} = dx' - \frac{12x'^2 + \cdots}{4x'^2 + \cdots} dx' \\ &= -2dx'(1 + g(x')),\end{aligned}$$

其中 g 是 $x' = 0$ 的邻域内的全纯函数, 而且在 $x' = 0$ 时为零. (紧) 空间 X' 上这样确定的形式 ω 局部有原函数, 这是 X' 上的一个多值函数, 它在 X' 中每点的邻域内用作局部坐标.

现假定常数 a_2 及 a_4 是从第五章 §2 中一个离散群 Ω 出发, 按照关系式 (5.5) 导出的. 于是同一节中的命题 5.1 表明, 亚纯变换

$$x = \mathfrak{p}(z), \quad y = \mathfrak{p}'(z) \tag{3.5}$$

确定解析空间 $\mathbf{C}/\Omega$ 到解析空间 X' 上的一个同构, 作为逆同构, z 是 X' 上的多值全纯函数, 它的各个 (局部) 分支彼此间可由加上属于 Ω 的常数而相互导出. 由 (3.5), 我们有 $dx = y\,dz$, 从而 dz (它是 X' 上确定好了的一个微分形式) 就是上面确定的形式 ω (这说明了记号 z 是合理的).

现在放弃这一假设: a_2 及 a_4 是从第五章 §2 中一个离散群 Ω 出发, 由公式 (5.5) 得来的. 在 X' 上由条件 $dz = \omega$ 所确定的多值函数 z 仍然是确定的. 对空间 X' 的拓扑作更深入的分析就可证明, 通过加上属于加法群 $\mathbf{C}$ 中一个离散子群 Ω 的常数, z 的各个分支彼此可以相互导出, 这里 Ω 是由线性无关的两元素 e_1 及 e_2 在实数域 $\mathbf{R}$ 上产生的. 要求多值函数 z 在 X' 中点 ∞ 处为零 (mod.Ω), 就可完全确定这一函数. 然后引进代数曲线

$$y^2 = 4x^3 - 20b_2x - 28b_4,$$

其中 b_2 及 b_4 由下列两式给出:

$$b_2 = 3 \sum_{\omega\in\Omega,\omega\neq 0} \frac{1}{\omega^4}, \quad b_4 = 5 \sum_{\omega\in\Omega,\omega\neq 0} \frac{1}{\omega^6}.$$

设 (X'', φ'') 是 S_2 上相应的黎曼面. 多值函数 z 确定从 X' 到 $\mathbf{C}/\Omega$ 的一个全纯映射. 在上面已经看到, $\mathbf{C}/\Omega$ 与 X'' 同构, 因此我们有一全纯映射 $f : X' \to X''$. 可以证明 (这里不作证明), f 是一同构, 因此在 X' 上, f 取任何类数值 (mod. Ω) 一次, 并且只取一次. 于是 X' 中一点的 (非齐次) 坐标 x 及 y 是 z 的以 Ω 作为周期群的亚纯函数. 容易看出, z 的函数 x 在 $z = 0$ 有二重极点, 并且有主要部分 $1/z^2$ (除 Ω 中的点外无其他极点). 由此推出 $x = \mathfrak{p}(z)$ 以及 $y = \mathfrak{p}'(z)$, 这里 p 表示依赖于群 Ω 的魏尔斯特拉斯函数. 这样, 同构 $f : X' \to X''$ 就是恒等映射, 并且我们有 $b_2 = a_2, b_4 = a_4$. 最后, 我们看到, 使 (3.1) 右边的多项式 $P(x)$ 有三个不同根的常数对 a_2 及 a_4, 确定一个离散群 Ω, 使得 a_2 及 a_4 满足第五章 §2 中的关系式 (5.5), 而且代数曲线 (3.1), 包括它的无穷远点, 可用公式 (3.5) 作为参数表示式.

4. 解析开拓概念

我们将限于考虑在复平面 $\mathbf{C}$ 中的解析开拓. 现提出问题如下:

问题 假定已给平面 $\mathbf{C}$ 中非空连通开集 U (U 看作 $\mathbf{C}$ 上的黎曼面, 取 $i: U \to \mathbf{C}$ 为自然的单射). 设已给在 U 内全纯的函数 f. 我们要找 $\mathbf{C}$ 上的一个无分支点的黎曼面 (X, φ), 以及 U 在 X 中一开集上的一个同构 j, 使其满足下列条件:

(i) $\varphi \circ j = i$ (这样可把 U 看作 X 中的一个 "子黎曼面");

(ii) 函数 f 开拓为 X 中的全纯函数 g ("开拓" 表示: 在 U 内我们有 $g \circ j = f$);

(iii) 黎曼面 (X, φ) 是在满足 (i) 及 (ii) 的黎曼面中 "可能最大的一个". 这确切地表示: 如果 $\mathbf{C}$ 上一个无分支点的黎曼面 (X', φ'), 以及 U 在 X' 中一开集上的一个同构 j' 满足与 (i) 及 (ii) 相类似的条件, 那么存在一个并且只有一个全纯映射

$$h: X' \to X,$$

使得

$$h \circ j' = j, \quad \varphi \circ h = \varphi'. \tag{4.1}$$

在进一步讨论以前, 先作一点说明: 根据 "解析开拓原理" (参看 §4 第 4 段), 在条件 (ii) 中, "开拓" f 的全纯函数 g 是唯一的, 而且在 (iii) 中, 如果 g' 是定义于 (iii) 中的 X' 中满足 $g' \circ j' = f$ 的唯一全纯函数, 那么我们必然有

$$g \circ h = g'. \tag{4.2}$$

事实上, $g \circ h$ 在 X' 中全纯, 并且因为根据 (4.1), $h \circ j' = j$; 根据假设, $g \circ j = f$, 所以在 U 内我们正好有 $(g \circ h) \circ j' = f$.

我们把性质 (iii) 简单地说成是三元组合 (X, φ, j) *具备泛性质* (指的是对于满足 (i) 及 (ii) 的三元组合).

解析开拓的基本定理如下: 给出一个连通开集 $U \subset \mathbf{C}$ 与一个在 U 内全纯的函数 f, *上述问题有一个解, 而且只有一个解*. 这里说的唯一性应理解为 "相差一个同构". 现先证明唯一性, 同时确切说明必须怎样理解 "相差一个同构".

唯一性的证明 假定有问题的两个解 (X, φ, j) 及 (X_1, φ_1, j_1). 因为由假设, (X, φ, j) 有泛性质, 所以存在着一个并且只有一个全纯映射 $h: X_1 \to X$, 使得

$$h \circ j_1 = j, \quad \varphi \circ h = \varphi_1. \tag{4.3}$$

根据同样的理由, 存在着一个并且只有一个全纯映射 $h_1: X \to X_1$, 使得

$$h_1 \circ j = j_1, \quad \varphi_1 \circ h_1 = \varphi.$$

考虑 X 到 X 的映射 $h \circ h_1$, 这是满足下列两式的一个映射 k:

$$k \circ j = j, \quad \varphi \circ k = \varphi;$$

而根据泛性质, 存在唯一的一个具有这些性质的全纯映射. 又因 X 的恒等映射具有这些性质, 所以 $k = h \circ h_1$ 是 X 的恒等映射. 根据同样的理由, $h_1 \circ h$ 是 X_1 的恒等映射. 由此可见, h 及 h_1 是彼此互逆的同构.

这样, 通过满足 (4.3) 的一个同构, 上述问题的任意两个解可以相互导出. 正是在这种意义下, 我们可以说除去相差一个同构外, 上述问题的解(如果有解的话)是唯一的.

还要证明解存在, 这更困难一些. 现作出证明, 但请初学者暂不学习这一证明.

设 (z_0, S) 是一点 $z_0 \in \mathbf{C}$ 及收敛半径不为零的一个 (单变量) 幂级数 S 所形成的一个二元组合, 设 Z 是这些二元组合的集. 在 Z 上确定拓扑如下: 对于开集 $V \subset \mathbf{C}$ 及 V 内全纯的函数 F 所形成的每一对 (V, F), 取二元组合 (z_0, S) 的集 $W(V, F)$ 与它对应, 在这里 $z_0 \in V, S$ 为幂级数 $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n X^n$, 它使得 $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n(z-z_0)^n$ 为 F 在 z_0 的邻域内的幂级数展式. 对于我们要在 Z 上确定的拓扑, 作为定义, 集 $W(V, F)$ 形成开集的一个基: Z 中任何开集是形如 $W(V, F)$ 的集的并集. 反之, 形如 $W(V, F)$ 的集的任何并集是一开集. 容易证明, 两个开集的交集是一开集, 于是我们正好在 Z 上确定了一个拓扑. 这拓扑是分离的. 如果 $z_0 \neq z_0'$, 不同两点 (z_0, S) 及 (z_0', S') 显然有不相交的开邻域; 如果 $z_0 = z_0', S \neq S'$, 那么由 "解析开拓原理",(与 z_0 充分接近的) 这样的点的集是空集:在这些点的邻域中, 不同幂级数 S 及 S' 所确定的全纯函数相同.

与每一二元组合 (z_0, S) 相对应, 取点 $z_0 \in \mathbf{C}$. 这样确定了一个映射 $p: Z \to \mathbf{C}$, 它局部为一同胚(这就是说, Z 的任何点有一邻域, 使得 p 在这邻域中的限制是到它的像上的一个同胚). 这一点可由 Z 的拓扑的定义立即推出. 把 p 作为空间 Z 中每点的邻域内的局部坐标, 在 Z 上就确定了一个解析空间结构. 对于这种结构, 映射 p 是全纯的. 因此如果 Z 是连通的 (我们将看到情况不是这样), 那么 (Z, p) 应当是 $\mathbf{C}$ 上的一个黎曼面.

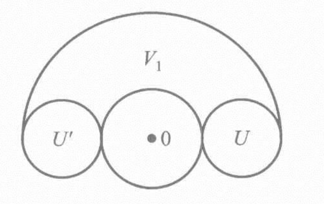
在空间 Z 中确定一个函数 G 如下: 作为定义, G 在一点 $(z_0, S) \in Z$ 的值是幂级数 $S = \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n X^n$ 的常数项, 这也是在 z_0 的邻域内确定的全纯函数 $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n(z-z_0)^n$ 在点 z_0 的值. 由 Z 的拓扑的定义容易看出, 在空间 Z 上这样确定的函数 G 是全纯的. 事实上, 如果在 (z_0, S) 的邻域内把它表示为局部坐标 z (邻近 z_0) 的函数, 就可看到函数 G 有幂级数展式 $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n(z-z_0)^n$, 这里 $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n X^n$ 恰好是级数 S.

直到现在, 我们还没有用到给出的非空连通开集 U 以及在 U 内全纯的函数 f. 现在就要用上它们. 考虑 $W(U, f)$: 作为定义, 这是解析空间 Z 中的一个 (非空连通) 开集, 并且映射 $p: Z \to \mathbf{C}$ 在这开集 $W(U, f)$ 中的限制是 $W(U, f)$ 到开集 $U \subset \mathbf{C}$ 上的一个同构. 设 j 是逆同构. 复合映射 $G \circ j$ 就是 f. 设 X 是 Z 中含开集 $j(U)$ 的连通支集, 又设 φ 是 p 在 X 中的限制, 最后设 g 是 G 在 X 中的限制.

由于 p 局部为一同胚, φ 也是这样, 因此 (X, φ) 正好是 $\mathbf{C}$ 上的一个无分支点的黎曼面. 为了证明 (X, φ) 及同构 j 满足问题中的条件, 只需证明它们满足条件 (i),(ii) 及 (iii). 条件 (i) 可由 j 的定义立即推出. 因为 g 是 G 在 X 中的限制, 并且如我们所已看到的, $G \circ j = f$, 所以条件 (ii) 是正确的. 现证明 (iii) : 设 (X', φ') 及 j' 像 (iii) 中那样, 而函数 g' 在 X' 中全纯, 并且在 U 内, $g' \circ j' = f$. 确定 X' 到 Z 中的一个映射 k, 对于每点 $x_0' \in X'$, 取一二元组合 $(\varphi'(x_0'), S)$ 和它对应, 这里 S 表示这样的幂级数 $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n X^n$: 设 $\lambda(z)$ 是在 x_0' 的邻域内满足 $\lambda(\varphi'(x')) = g'(x')$ 的全纯函数, $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n(z-z_0)^n$ 是 $\lambda(z)$ 在 $z_0 = \varphi'(x_0')$ 的邻域内的展式 (这里用到了这样的假设: 黎曼面 (X', φ') 是无分支点的, 从而 $\varphi'(x')$ 是在 X' 上 x_0' 的邻域内的局部坐标). 刚才确定的映射 k 在 X' 中全纯. 由于空间 X' 是连通的 (根据黎曼面的定义), 它在映射 k 下的像是连通的,

又因这个像显然包含开集 $j(U)$, 所以这像包含在 Z 中的连通支集 X 内. 因此 k 导出从 X' 到 X 的一个全纯映射 h, 并且容易证明 h 满足条件 (4.1). 为了完成证明, 还只需证明: 满足 (4.1) 的任何全纯映射 $h: X' \to X$, 与上述映射重合, 然而这两映射必须在非空开集 $j'(U)$ 内重合, 于是根据解析开拓原理 (§4 第 4 段), 它们在整个连通空间 X' 内重合.

几点说明 在包含已给开集 U, 而且使已给函数 f 在 U 内为全纯的黎曼面中, 我们像这样得到了一个 “最大的” 在 $\mathbf{C}$ 上无分支点的黎曼面. 最简单的想法应当是求一个包含 U 的连通的 “最大开集” V, 使得在这开集内 f 可开拓为一全纯函数. 但是这样的问题一般无解. 正是因此, 必须考虑 $\mathbf{C}$ 上无分支点的黎曼面, 而不是简单地考虑 $\mathbf{C}$ 上的开集. 这里有一个例子, 它表明不存在包含 U 的最大连通开集 V, 使得 f 在 V 内可以开拓: 取 $\mathbf{C}$ 中不含 0 的一个开圆盘作为 U, 并且取 $\log z$ 在 U 内的一个分支作为函数 f. 设 U' 是与 U 关于 0 为对称的开圆盘, 容易作出同时包含 U 及 U' 的两个单连通开集 V_1 及 V_2 (见图 13) : 如果在 V_1 内以及在 V_2 内开拓 $\log z$ 在 U 内的所考虑的分支, 那么所得 V_1 内以及 V_2 内的分支在 U' 中的限制, 就是不同的分支. 因此不存在包含 V_1 及 V_2 的开集 V, 使得 $\log z$ 在 U 内的分支可以在 V 内开拓. 于是不存在包含 U, 且使 f 在 U 内可进行开拓的最大开集.



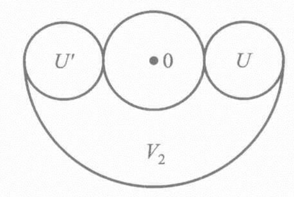


图 13

总是设 f 为开集 $U \subset \mathbf{C}$ 内的全纯函数, 并且设 $z_0 \in U$. 考虑起点为 z_0, 终点为 z_1 的一条道路 $\gamma: I \to \mathbf{C}$, 我们不假定 γ 的像包含在 U 内.(I 表示线段 $[\,0,1\,]$.) 另一方面, 设三元组合 (X, φ, g) 满足条件 (i),(ii),(iii). 如果存在一个连续映射 $h: I \to X$, 使得 $\varphi \circ h = \gamma$ 及 $h(0) = j(z_0)$, 那么这样的 h 是唯一的 (容易证明), 我们称它为黎曼面 (X, φ) 上道路 γ 的一个标志. 在点 $h(1) \in X$ 的邻域内, 函数 g 可表示为点 z_1 的邻域内 $z = \varphi(x)$ 的全纯函数, 我们说 z 的这个全纯函数是由全纯函数 f 沿道路 γ (起点为 z_0, 终点为 z_1) 作解析开拓而得.

上述解析开拓理论有种种推广. 例如可不在 $\mathbf{C}$ 上无分支点的黎曼面上开拓, 而在黎曼球面上 无分支点的黎曼面上开拓, 论证与这里相类似. 我们也可考虑不是无分支点的黎曼面, 而对它们加上与 (i),(ii) 及 (iii) 相类似的条件, 于是可证明, 这样提出的问题还是有一个解, 而且这个解 “除去相差一个同构外” 是唯一的.

习　题

1. 设 D 是平面 $\mathbf{C}$ 上与 $\mathbf{C}$ 不同的一个单连通开集, 并且设 $a \in D$. 给出一个满足 $|\,b\,| < 1$ 的复

数 b 以及一个实数 α, 证明存在着只有一个全纯函数 $f(z)$, 它确定 D 到单位圆盘上的一个同构, 并且满足

$$\text{(i) } f\ (a) = b, \quad \text{(ii) } \arg f'(a) = \alpha.$$

2. 设 D 是一连通开集, 其边界为无公共点的两圆 C_1 及 C_2 的并集, 而且 C_1 含在 C_2 的内部. 证明存在着把 D 映射到圆环 $r <\mid z \mid< 1$ 上的一个单应变换 (这里 r 是 > 0 并且 < 1 的一个适当的数).

3. 设 $f(z)$ 是单位圆盘 $B :\mid z \mid< 1$ 内的全纯单叶函数, 并且设 $D = f(B)$ 是 B 在 f 下的像. 同样, 设 D_r 是开圆盘 $B_r :\mid z \mid< r(0 < r < 1)$ 在 f 下的像.

(i) 证明: 如果 h 是 D 的一个自同构, 它使点 $f(0)$ 不动, 那么我们有:

$$h(D_r) \subset D_r, \quad \text{对于 } 0 < r < 1.$$

(对函数 $f^{-1}(h(f(z))$ 应用施瓦茨引理.)

(ii) 证明: 如果 D 关于点 $f(0)$ 是*星形的*(定义请参看第二章 §1 第 7 段), 那么对于 $0 < r < 1, D_r$ 关于点 $f(0)$ 也是星形的. (化到 $f(0) = 0$ 情形, 并且对于 $0 < \lambda < 1$, 考虑函数 $f^{-1}(\lambda f(z))$.)

(iii) 现在假定 D 是*凸的*. 证明对于 $0 < r < 1, D_r$ 也是凸的. 如果 E 是满足 $\bar{E} \subset B$ 的一个开圆盘, 它的像 $f(E)$ 也是凸的吗?

(给出 $0 < \lambda < 1$, 以及 $z_1, z_2 \in B$. 如果 $\mid z_1 \mid\leqslant\mid z_2 \mid\neq 0$, 考虑函数

$$g_\lambda(z) = (1 - \lambda)f(zz_1/z_2) + \lambda f(z).$$

对于第二个问题, 证明存在着 B 的一个自同构 φ, 满足 $\varphi(E) = B_r$, 这里 $0 < r < 1$; 然后考虑函数 $f \circ \varphi^{-1}$.)

4. 设 $w = f(z)$ 是单位圆盘 $\mid z \mid< 1$ 内的全纯单叶函数, 并且设 Γ 是圆 $\mid z \mid= r(0 < r < 1)$ 在 f 下的像. 证明 Γ 在点 $f(a)(\mid a \mid= r)$ 处的曲率半径 ρ 由下列公式给出:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\text{Re}(af''(a)/f'(a)) + 1}{\mid af'(a) \mid}.$$

(注意: 如果 $f(re^{i\theta}) = u(\theta) + iv(\theta)$, 我们有

$$\frac{u'v'' - u''v'}{u'^2 + v'^2} = \text{Im}(\frac{u'' + iv''}{u' + iv'}),$$

其中 u', u'' 等表示关于 θ 的导数.)

5. 设 a 是复数, r 是实数 > 0, C 是心为 a, 半径为 r 的圆, z_1, z_2 是关于圆周 C 的反演下的对应点. 设 S 是满足 $S(a) \neq \infty$ 的一个单应变换. 证明 $S(z_1)$ 及 $S(z_2)$ 在同一个反演下相互对应, 决定这一反演的中心和半径. 如果 $S(a) = \infty$, 证明 $S(z_1)$ 及 $S(z_2)$ 关于一直线 (即 C 在 S 下的像) 为对称.

6. 设 C (及 Γ) 是复平面 z (及 w) 上由 $\mid z - a \mid= r$ (及 $\mid w - \alpha \mid= \rho$) 确定的一个圆. 设 D (及 Δ) 是 z (及 w) 平面上满足下列条件的一个连通开集:

(i) $C_0 = D \cap C$ (及 $\Gamma_0 = \Delta \cap \Gamma$) 是 C (及 Γ) 的一段非空 (开) 弧;

(ii) $D_+ = J_C(D_-)$ (及 $\Delta_+ = J_\Gamma(\Delta_-)$), 在这里 J_C (及 J_Γ) 表示关于圆 C (及 Γ) 的反演. $D_\pm$ (及 $\Delta_\pm$) 表示满足 $|z-a| \gtrless r$ (及 $|w-\alpha| \gtrless \rho$) 的 $z(\in D)$(及 $w(\in \Gamma)$) 所构成的集.

又设有一函数 f 在 $D_+ \cup C_0$ 中确定且连续, 在 $\Delta_+ \cup \Gamma_0$ 中取值, 并且满足:

(iii) f 在 D_+ 中全纯, 且把 D_+ 映射到 Δ_+ 内;

(iv) f 把 C_0 映射到 Γ_0 内.

证明: 在这些假设下, f 能唯一地开拓成为在 D 内全纯, 且把 D_- 映射到 Δ_- 内的函数 g. (应用第 5 题化到 C_0 (及 Γ_0) 包含在实轴内的情形, 然后应用第二章, §2, 第 9 段中的施瓦茨对称原理.

现把 (iii) 及 (iv) 换成下列较强的假设:

(iii′) f 确定 D_+ 到 Δ_+ 上的一个同构;

(iv′) f 把 C_0 映射到 Γ_0 上.

证明开拓 g 是 D 到 Δ 的一个同构. (特别必须证明 f 是单叶的, 即须证明 f 在 C_0 中不同的点取不同的值; 应用第三章, §5, 命题 4.2 , 可用反证法来证明这一点.)

7. 设 a 及 r 是满足 $r > a > 0$ 的两实数. 求一函数 $w = f(z)$, 使其确定卡西尼卵线的内部 $D : |z^2 - a^2| < r^2$ 到单位圆盘 $B : |w| < 1$ 上的一个同构, 并使对称轴保持不变. (考虑由

$$|z^2 - a^2| < r^2, \quad \mathrm{Re}(z) > 0$$

所确定的卡西尼卵线内部的右半部 D^+, 以及由

$$|w| < 1, \quad \mathrm{Re}(w) > 0$$

所确定的单位圆盘的右半部 B^+. 由对称原理, 只需求一函数 f, 使其确定 D^+ 到 B^+ 上的一个同构, 使其在实轴上取实值, 并且把 z 平面的线段 iy, $|y| \leqslant r^2 - a^2$ 映射到 w 平面的线段 iv, $|v| \leqslant 1$上. 为此, 先考虑变换 $\zeta = z^2$, 然后考虑把圆周 $|\zeta - a^2| = r^2$ 变成单位圆周 $|Z| = 1$, 把线段 $a^2 - r^2 \leqslant \mathrm{Re}(\zeta) \leqslant 0$, $\mathrm{Im}(\zeta) = 0$ 变成线段 $-1 \leqslant \mathrm{Re}(z) \leqslant 0$, $\mathrm{Im}(Z) = 0$ 的单应变换 $Z = \dfrac{\alpha\zeta + \beta}{\gamma\zeta + \delta}$. 最后考虑函数 $w = Z^{1/2}$ 的一个适当的分枝.)

8. 设 $P^+ : \mathrm{Im}(z) > 0$ 为上半平面. 考虑沿 P^+ 内连结 0 及 z 的道路所取积分确定的函数 $f(z)$:

$$u = f(z) = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

其中 k 是满足 $0 < k < 1$ 的一个实常数. 取根式在 $t = 0$ 时为 1 的单值分支. 证明 $f(z)$ 可以在闭半平面 $\mathrm{Im}(z) \geqslant 0$ 开拓成为一个连续函数.

令

$$K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, K' = \int_1^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}} \quad (t\text{为实数}).$$

证明: 这样开拓而得的函数 $f(z)$ 确定半平面 P^+ 到以下列各点为顶点的 (开) 矩形上的一个同构: $-K, K, K+iK', -K+iK'$, 而且 $f(z)$ 把实轴映射成这矩形的边界. 确定与矩形各顶点的对应点.

证明可把逆变换 $z = F(u)$ 在变量 u 的平面内开拓成一双周期亚纯函数, 其周期为 $4K, 2iK'$. 找出这函数的零点和极点, 并且由此导出, 存在一个常数 A, 使得我们有

$$F(u) = A\vartheta_1(u/2K)/\vartheta_0(u/2K),$$

这里 ϑ_0, ϑ_1 表示第五章习题 3 中考虑过的函数, 而取 $\tau = iK'/K$.

第七章　全纯微分方程组

§1. 存在与唯一性定理

1. 问题的提出

设 k 为一整数 $\geqslant 1$. 假定已给 $k+1$ 个复变量的全纯函数 k 个:

$$f_i(x, y_1, \cdots, y_k), \quad 1 \leqslant i \leqslant k,$$

假定这些函数在一点 $(a, b_1, \cdots, b_k)$ 的邻域内全纯. 考虑微分方程组

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \cdots, y_k), \quad 1 \leqslant i \leqslant k. \tag{1.1}$$

我们要求含 k 个函数 $y_i = \varphi_i(x)$ $(i = 1, \cdots, k)$ 的函数组, 使得这些函数在点 $x = a$ 的邻域内全纯, $\varphi_i(a) = b_i$, 而且满足方程组 (1.1). 最后一条件表明导数 $\varphi_i'(x)$ 满足

$$\varphi_i'(x) = f_i(x, \varphi_1(x), \cdots, \varphi_k(x)). \tag{1.2}$$

定理 1 上述问题有一组解, 并且只有一组解.

下三段中将证明这一定理.

2. $k = 1$ 情形: 形式解

这时我们有自变量 x 的唯一一个未知函数 y, 要解的微分方程是

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{2.1}$$

$f(x,y)$ 是已给的在点 (a,b) 的邻域内全纯的一个函数. 为了简单起见, 此后假定 $a=0, b=0$. 应用平移, 我们总可化到这种情形. 设

$$f(x,y)=\sum_{p,q\geqslant 0} c_{p,q}x^p y^q \tag{2.2}$$

为 f 的泰勒展式. 由假设, 它在原点的邻域内收敛. 未知函数 $y=\varphi(x)$ 有泰勒展式

$$\varphi(x)=\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n, \tag{2.3}$$

其系数 a_n 待定. 由于我们要求 $\varphi(0)=0$, 系数 a_0 为 0.

第一步限于求出形式上满足微分方程 (2.1) 的一个形式幂级数 (2.3). 换句话说, 用 $\varphi'(x)$ 表示形式级数 $\varphi(x)$ 的形式导数, 我们必须有

$$\varphi'(x)=f(x,\varphi(x)), \tag{2.4}$$

其中右边是用 (无常数项的) 形式级数 $\varphi(x)$ 代换 y 而得.

命题 2.1 *已给形式级数 (2.2), 存在一个并且只有一个形式级数 (2.3) 满足 (2.4).*

现证明这一命题. 只是到后面再考虑这样得到的级数 (2.3) 实际上在 0 的邻域内是否收敛的问题.

把 (2.4) 两边的 x 的形式级数看作相同. 取两边 x^n 的系数相等, 我们得到:

$$(n+1)a_{n+1}=P_{n+1}(a_1,\cdots,a_n;c_{p,q}), \tag{2.5}$$

其中 P_{n+1} 是字母 $a_1,\cdots,a_n$ 及有限个字母 $c_{p,q}$ 的一个多项式, 这是一个系数为整数 $\geqslant 0$ 的多项式. 不必更明显地求出这个多项式. 例如:

$$a_1=c_{0,0},\quad 2a_2=c_{1,0}+c_{0,1}a_1.$$

由关系式 (2.5) 可对 n 递推求出

$$a_n=Q_n(c_{p,q}), \tag{2.6}$$

其中 Q_n 是若干变量 $c_{p,q}$ (每个多项式 Q_n 中只含这些变量有限个) 的有理系数 $\geqslant 0$ 多项式. 必须注意到多项式 Q_n 一旦确定就确定了; 它们的系数与 (2.2) 右边的系数 $c_{p,q}$ 的值无关. 前两个 Q_n 如下:

$$Q_1=c_{0,0},\quad Q_2=\frac{1}{2}(c_{1,0}+c_{0,1}c_{0,0}).$$

为了使得形式关系式 (2.4) 成立, 关系式 (2.6) 是必要而且充分的. 如此, 命题 2.1 得证.

3. $k=1$ 情形: 收敛问题

现假定 (2.2) 右边的幂级数在 $(0,0)$ 的邻域内收敛. 我们要证明: 系数由公式 (2.6) 确定的幂级数 (2.3) 有非零的收敛半径. 为此, 要应用所谓控制级数法.

定义 已给形式幂级数

$$F(x,y)=\sum_{p,q\geqslant 0}C_{p,q}x^py^q. \tag{3.1}$$

如果系数 $C_{p,q}\geqslant 0$, 并且满足不等式

$$|\, c_{p,q}\,|\leqslant C_{p,q},$$

那么称形式幂级数 (3.1) 是级数 (2.2) 的一个**控制级数**.

我们同样定义形式级数 (2.3) 的一个控制级数

$$\Phi(x)=\sum_{n\geqslant 1}A_nx^n. \tag{3.2}$$

命题 3.1 *设 $F(x,y)$ 是级数 $f(x,y)$ 的一个控制级数. 设不含常数项的形式级数 $\Phi(x)$ 是微分方程*

$$\frac{dy}{dx}=F(x,y) \tag{3.3}$$

的唯一形式解. 那么 Φ 是 φ 的一个控制级数.

证明 如我们所已看到的, 级数 Φ 的系数 A_n 由下列公式确定:

$$A_n=Q_n(C_{p,q}). \tag{3.4}$$

由于多项式 Q_n 的系数 $\geqslant 0$, 由不等式 $|\, c_{p,q}\,|\leqslant C_{p,q}$ 以及关于和或积的绝对值的经典不等式, 可立即证明 $|\, a_n\,|\leqslant A_n$. 命题得证.

为了证明: 当已给级数 (2.2) 在原点的邻域内收敛时, 级数 (2.3) 有非零的收敛半径, 将进行如下: 我们要求出级数 f 的控制级数 F, 然后明显算出微分方程 (3.3) 的形式解 Φ, 并且直接证明级数 Φ 有一收敛半径 $\neq 0$. 由于级数 φ 的收敛半径至少等于控制级数 Φ 的收敛半径, 可以推出, φ 的收敛半径 $\neq 0$. 于是在 $k=1$ 的情形, 定理 1 (第 1 段) 将完全得证.

由假设, 级数 (2.2) 在一个闭圆盘

$$|\, x\,|\leqslant r,\quad |\, y\,|\leqslant r \tag{3.5}$$

中收敛, 其中 r 为一数 >0. 设 M 是 $|\, f(x,y)\,|$ 在集 (3.5) 上的上确界. 由柯西不等式 (第四章 §5 公式 (4.2)), 我们有

$$|\, c_{p,q}\,|\leqslant \frac{M}{r^{p+q}}. \tag{3.6}$$

令

$$C_{p,q} = \frac{M}{r^{p+q}}, \tag{3.7}$$

$C_{p,q}$ 是一个幂级数 $F(x,y)$ 的系数, 而 $F(x,y)$ 是 $f(x,y)$ 的一个控制级数. 直接计算二重几何级数 F 的和: 对于 $|x|<r, |y|<r$,

$$F(x,y) = \frac{M}{(1-\frac{x}{r})(1-\frac{y}{r})}. \tag{3.8}$$

微分方程 (3.3) 是一个变量分离了的方程:

$$\left(1-\frac{y}{r}\right)dy = \frac{M\,dx}{1-\frac{x}{r}}. \tag{3.9}$$

用积分法求解: 在 $x=0$ 时为零的解 y 由下列关系式给出:

$$\left(1-\frac{y}{r}\right)^2 - 1 = 2M\ \log\left(1-\frac{x}{r}\right), \quad |x|<r, \tag{3.10}$$

其中在右边, 我们取于 $x=0$ 时为零的对数分支. 由 (3.10) 求出

$$y = r\left(1-\sqrt{1+2M\ \log\left(1-\frac{x}{r}\right)}\right), \tag{3.11}$$

其中在右边, 我们取于 $x=0$ 时为 1 的根式分支. (3.11) 的右边就是函数 $\Phi(x)$, 即微分方程 (3.3) 在 $x=0$ 的邻域内的解. 然而显然, 这函数在 $x=0$ 的邻域内全纯, 因而它的幂级数展式有一收敛半径 $\neq 0$. 事实上, 容易看出, (3.11) 右边的收敛半径等于

$$r\left(1-e^{-\frac{1}{2M}}\right).$$

定理 1 在 $k=1$ 的情形下证完.

4. k 为任意情形

现回到第 1 段中提出的问题. 假定 $a, b_1, \cdots, b_k$ 是零. 应用平移, 总可化到这种情形. k 个全纯函数 $f_i(x, y_1, \cdots, y_k)$ 有泰勒展式

$$f_i(x, y_1, \cdots, y_k) = \sum_{p, q_1, \cdots, q_k \geqslant 0} c^{(i)}_{p, q_1, \cdots, q_k} x^p y_1^{q_1} \cdots y_k^{q_k}. \tag{4.1}$$

已给这些级数, 我们要确定在 0 的邻域内收敛, 并且满足关系式 (1.2) 的幂级数

$$\varphi_i(x) = \sum_{n \geqslant 1} a_n^{(i)} x^n. \tag{4.2}$$

与 $k=1$ 情形一样, 我们要分两步进行: 先形式上解方程 (1.2), 然后证明所得幂级数收敛.

方程 (1.2) 的形式解是唯一的: 对于每个 i, 我们只需写出

$$\sum_n (n+1)a_{n+1}^{(i)}x^n = \Sigma c_{p,q_1,\cdots,q_k}^{(i)} x^p \left(\sum_{r_1} a_{r_1}^{(i)} x^{r_1}\right)^{q_1} \cdots .$$

由此得, 对于每个 i,

$$a_n^{(i)} = Q_n^{(i)}(c_{p,q_1,\cdots,q_k}^{(j)}), \tag{4.3}$$

其中 $Q_n^{(i)}$ 是有理系数 $\geqslant 0$ 的多项式, 而且每个多项式只依赖于有限个变量 $c_{p,q_1,\cdots,q_k}^{(j)}$ (指标 j 取值 $1,\cdots,k$).

现在证明: 如果幂级数 (4.1) 在原点的邻域内收敛, 那么系数由 (4.3) 给出的级数 (4.2) 有非零的收敛半径. 为此, 要把每个级数 f_i 用一个控制级数 F_i 来代替. 设 $(\Phi_1,\cdots,\Phi_k)$ 是 "控制方程组"

$$\frac{dy_i}{dx} = F_i(x, y_1, \cdots, y_k) \tag{4.4}$$

的唯一形式解. 那么对于每个 i, Φ_i 是 φ_i 的控制级数 (证明与命题 3.1 的证明相仿). 还只需明显确定出 F_i 及 Φ_i.

由假设, f_i 在闭多圆柱

$$|\,x\,| \leqslant r, \ |\,y_i\,| \leqslant r, \quad 对于\ 1 \leqslant i \leqslant k \tag{4.5}$$

中全纯, 并且在这闭多圆柱上, f_i 的绝对值 $|\,f_i\,|$ 以一数 M 为上界. 由此推出, 可取

$$C_{p,q_1,\cdots,q_k}^{(i)} = \frac{M}{r^{p+q_1+\cdots+q_k}} \tag{4.6}$$

作为控制级数 F_i 的系数, 于是微分方程组 (4.4) 可写成

$$\frac{dy_i}{dx} = \frac{M}{1-\dfrac{x}{r}}\left(\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{1-\dfrac{y_i}{r}}\right). \tag{4.7}$$

设 $y_i = \Phi_i(x)$ 是微分方程组 (4.7) 的唯一形式解. 我们要证明所有级数 Φ_i 等于同一级数 Φ. 事实上, 设 $y = \Phi(x)$ 是微分方程

$$\left(1-\frac{y}{r}\right)^k \frac{dy}{dx} = \frac{M}{1-\dfrac{x}{r}} \tag{4.8}$$

的唯一形式解. 显然, 如果对于任何 i, 令 $y_i = \Phi(x)$, 那么正好得到 (4.7) 的一个形式解, 这就证明了上述论断.

归根结底, 要证明形式级数 $y = \Phi(x)$, 即方程 (4.8) 的解有非零的收敛半径. 然而微分方程 (4.8) 可用积分法解出: 在 $x = 0$ 时为零的解由下式给出:

$$y = r\left\{1 - \left[1 + (k+1)M\ \log\left(1 - \frac{x}{r}\right)\right]^{\frac{1}{k+1}}\right\}, \tag{4.9}$$

而且 (4.9) 右边正好是在 $x = 0$ 的邻域内全纯的函数 $\Phi(x)$, 因此它的收敛半径正好 $\neq 0$. 事实上, 它的收敛半径等于

$$r\left(1 - e^{-\frac{1}{(k+1)M}}\right).$$

§2. 对参变量及初值条件的依赖性

1. 对参变量的依赖性

现在假定: §1 中微分方程组 (1.1) 的右边出现的全纯函数 f_i 全纯地依赖于参变量 $t_1, \cdots, t_j$. 确切地说, 给出 $k+j+1$ 个复变数的函数 k 个:

$$f_i(x, y_1, \cdots, y_k, t_1, \cdots, t_j),$$

它们在原点的邻域内全纯. 对于与 $(0, \cdots, 0)$ 充分接近的每一组 $(t_1, \cdots, t_j)$, 微分方程组

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \cdots, y_k; t_1, \cdots, t_j), \quad (1 \leqslant i \leqslant k). \tag{1.1}$$

有一组并且只有一组在 $x = 0$ 时为零的全纯解 $y_i = \varphi_i(x)$. 函数 $\varphi_i(x)$ 当然依赖于 $t_1, \cdots, t_j$ 所取的值. 我们记

$$y_i = \varphi_i(x; t_1, \cdots, t_j), \quad (1 \leqslant i \leqslant k) \tag{1.2}$$

为 (1.1) 的满足 $\varphi_i(0; t_1, \cdots, t_j) = 0\,(i = 1, \cdots, k)$ 的解.

定理 2 在上述假设下, 函数 $\varphi_i(x; t_1, \cdots, t_j)$ 是 $j+1$ 个变量 $x, t_1, \cdots, t_j$ 的函数, 它们在原点的邻域内全纯.

为了简化记号, 我们限于在 $k = 1, j = 1$ 情形下证明这一定理. 于是我们有

$$f(x, y; t) = \sum_{p,q \geqslant 0} c_{p,q}(t) x^p y^q, \tag{1.3}$$

其中系数 $c_{p,q}(t)$ 本身是 t 的幂级数:

$$c_{p,q}(t) = \sum_{r \geqslant 0} c_{p,q,r} t^r. \tag{1.4}$$

微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y; t) \tag{1.5}$$

的唯一形式解的系数 a_n 由 §1 中公式 (2.6) 给出. 因此每个 a_n 本身是 t 的形式级数. 这样, 方程 (1.5) 的形式解是关于两个变量 x 及 t 的形式级数

$$y=\varphi(x,t). \tag{1.6}$$

为了证明定理 2, 只需证明: 当 x 及 t 充分小时, 形式级数 (1.6) 收敛. 为此, 我们还是要应用控制级数法. 由假设, 函数 $f(x,y,t)$ 在闭多圆柱

$$|x|\leqslant r, |y|\leqslant r, |t|\leqslant r \quad (r>0) \tag{1.7}$$

的邻域内全纯. 因此它有一个下列形状的控制级数:

$$F(x,y,t)=\frac{M}{\left(1-\dfrac{x}{r}\right)\left(1-\dfrac{y}{r}\right)\left(1-\dfrac{t}{r}\right)}. \tag{1.8}$$

我们看到, 这一控制级数可由 §1 第 3 段中所考虑的控制级数导出：只需在 §1 公式 (3.8) 的右边把数 M 换成 $M\Big/\left(1-\dfrac{t}{r}\right)$. 因此控制微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=F(x,y,t)$ 的解 $y=\Phi(x,t)$ 由下列关系式给出:

$$\frac{\Phi(x,t)}{r}=1-\left[1+\frac{2M}{1-\dfrac{t}{r}}\log\left(1-\frac{x}{r}\right)\right]^{1/2}. \tag{1.9}$$

然而显然, (1.9) 的右边是变量 x 及 t 在原点 $x=0,t=0$ 的邻域内的一个全纯函数. 这样就完成了定理 2 的证明.

2. 对初值条件的依赖性

为了简单起见, 考虑不依赖于任何参变量的微分方程组

$$\frac{dy_i}{dx}=f_i(x,y_1,\cdots,y_k). \tag{2.1}$$

总是假定已给函数 $f_i(x,y_1,\cdots,y_k)$ 在原点的邻域内全纯. 如果点 $(b_1,\cdots,b_k)$ 与原点充分接近, 函数 f_i 在点 $(0,b_1,\cdots,b_k)$ 的邻域内仍然全纯. 因此可应用存在与唯一性定理 (§1 中定理 1)：微分方程组 (2.1) 有一组并且只有一组解 $y_i=\varphi_i(x)$, 在 $x=0$ 的邻域内全纯, 并且使 $\varphi_i(0)=b_i$. 函数 $\varphi_i(x)$ 显然依赖于初值 $b_1,\cdots,b_k$. 把这些函数记作 $\varphi_i(x;b_1,\cdots,b_k)$.

定理 3 *采用上列记号, 对于变量 $x,b_1,\cdots,b_k$, 函数 $\varphi_i(x;b_1,\cdots,b_k)$ 在原点 $x=0,b_1=0,\cdots,b_k=0$ 的邻域内全纯.*

换句话说, 微分方程组 (2.1) 的解全纯地依赖于未知函数 y_i 的初值 b_i.

证明 取

$$z_i = y_i - b_i \tag{2.2}$$

作为新的未知函数. 它们必须满足微分方程组

$$\frac{dz_i}{dx} = f_i(x, z_1 + b_1, \cdots, z_k + b_k), \tag{2.3}$$

且有初值 $z_i(0) = 0$. 方程 (2.3) 的右边在原点的邻域内全纯地依赖于参变量 $b_1, \cdots, b_k$. 由定理 2, (2.3) 在 $x = 0$ 时为零的唯一解是一组全纯函数 $z_i = \psi_i(x; b_1, \cdots, b_k)$. 在 (2.1) 的解中, 当 $x = 0$ 时, $y_i = b_i$ 的解由下式给出:

$$y_i = b_i + \psi_i(x; b_1, \cdots, b_k),$$

从而对于 $x, b_1, \cdots, b_k$, 这组解在原点的邻域内全纯. 定理 3 得证.

§3. 高阶微分方程

我们限于考虑一个例子, 即一个 k 阶微分方程的例子:

$$\frac{d^k y}{dx^k} = f(x, y, y', \cdots, y^{(k-1)}). \tag{3.1}$$

已给函数 f 是 $k+1$ 个变量在一点 $(a, b, b_1, \cdots, b_{k-1})$ 的邻域内的全纯函数. 我们要求在点 $x = a$ 的邻域内全纯的函数 $y = \varphi(x)$, 使得 $\varphi(a) = b$, 逐阶导数 $\varphi'(x), \cdots, \varphi^{(k-1)}(x)$ 在点 a 分别取值 $b_1, \cdots, b_{k-1}$, 并且对于与 a 充分接近的 x, 恒等地有

$$\varphi^{(k)}(x) = f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \cdots, \varphi^{(k-1)}(x)).$$

定理 4 上列问题有一解, 并且只有一解.

证明 按照经典的方法, 引入新的未知函数, 可把 (3.1) 这样的方程的求解问题, 化为一个一阶微分方程组的求解问题. 准确地说, 除未知函数 $y = \varphi(x)$ 外, 引进函数

$$y' = \frac{d\varphi}{dx}, \cdots, y^{(k-1)} = \frac{d^{k-1}\varphi}{dx^{k-1}}.$$

函数 $y, y', \cdots, y^{(k-1)}$ 必须满足微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y', \\ \dfrac{dy'}{dx} = y'', \\ \cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \dfrac{dy^{(k-2)}}{dx} = y^{(k-1)} \\ \dfrac{dy^{(k-1)}}{dx} = f(x, y, y', \cdots, y^{(k-1)}). \end{cases} \tag{3.2}$$

对方程组 (3.2) 应用 §1 中定理 1, 就可证明现在的定理 4.

习　题

1. 设已给下列形状的线性微分方程:

$$(a_0x+b_0)y^{(n)}+(a_1x+b_1)y^{(n-1)}+\cdots+(a_nx+b_n)y=0. \tag{1}$$

证明: 如果 $U(z)$ 是在开集 D 内连续的函数, 并且 γ 是 D 内分段可微的道路, 其起点为 z_0, 终点为 z_1, 那么积分

$$f(x)=\int_\gamma e^{zx}U(z)dz \tag{2}$$

所确定的函数 $f(x)$ 在变量 x 的平面上到处全纯. 为了使得 $f(x)$ 是 (1) 的一个解, 只需有

$$[e^{zx}A(z)U(z)]_{z_0}^{z_1}=0, \tag{i}$$

$$\frac{d}{dz}(A(z)U(z))=B(z)U(z), \tag{ii}$$

这里

$$A(z)=a_0z^n+\cdots+a_n,\quad B(z)=b_0z^n+\cdots+b_n.$$

假定 $A(z)$ 有 n 个彼此不相等的零点 $c_1,\cdots,c_n$. 证明可以写出

$$\frac{B(z)}{A(z)}=\alpha+\frac{\alpha_1}{z-c_1}+\cdots+\frac{\alpha_n}{z-c_n},$$

其中 $\alpha,\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是复常数, 并且由此导出: 如果 $\gamma_j(j=1,\cdots,n)$ 表示在 D 中从一定点 $z_0\in D$ 出发, 并且围绕点 c_j 一次的一条闭可微道路 (这里 $D=\mathbf{C}-\{c_1,\cdots,c_n\}$), 如果 $\gamma_{j,k}(1\leqslant j,\ k\leqslant n)$ 表示这样确定的周线: 依次按正向围绕 γ_j, 按正向围绕 γ_k, 然后按逆向围绕 γ_j, 最后按逆向围绕 γ_k, 并且如果取一般为多值的函数如下: 对于 $z\in D$,

$$U(z)=\frac{1}{A(z)}e^{\alpha z}(z-c_1)^{\alpha_1}\cdots(z-c_n)^{\alpha_n},$$

那么在积分 (2) 中取 $\gamma=\gamma_{j,k}$ (因此 $z_0=z_1$), (2) 就确定 (1) 的一个解. 证明这样至多得到 $n-1$ 个解 (在平面上全纯).

2. 用控制级数法证明隐函数定理 (第四章 §5 第 6 段中命题 6.1, 这里采用这一命题叙述中的记号): 先证明可化到 $a_j=b_j=c_k=0\,(j=1,\cdots,n;\ k=1,\cdots,p)$ 情形, 并且我们有

$$\begin{aligned}f_j(x_1,\cdots,x_n;z_1,\cdots,z_p)=&\,c_{j1}(z)x_1+\cdots+c_{jn}(z)x_n\\&+\sum_{\nu_1+\cdots+\nu_n\geqslant 2}c_{j\nu_1\cdots\nu_n}(z)x_1^{\nu_1}\cdots x_n^{\nu_n},\end{aligned} \tag{1}$$

其中系数 $c_{jj'}(z)$ 及 $c_{j\nu_1\cdots\nu_n}(z)$ 本身是 $z_1,\cdots,z_p$ 的幂级数, 并且对于充分小的 $x_1,\cdots,x_n$; $z_1,\cdots,z_p$,

$$\det|c_{jj'}(z)|\neq 0.$$

应用克拉默公式, 由此推出, 第四章 §5 中的方程组 (6.1) 等价于

$$x_j = \gamma_{j1}(z)y_1 + \cdots + \gamma_{jn}(z)y_n + \sum_{\nu_1+\cdots+\nu_n \geqslant 2} \gamma_{j\nu_1\cdots\nu_n}(z)x_1^{\nu_1}\cdots x_n^{\nu_n}, \tag{2}$$

$j = 1, \cdots, n$, 其中系数 γ 也是 $z_1, \cdots, z_p$ 的幂级数. 并且推出, 于是 (2) 可写成

$$\begin{aligned} x_j = &\sum_{\substack{1\leqslant j'\leqslant n \\ \chi_1,\cdots,\chi_p \geqslant 0}} \gamma_{jj';\chi_1\cdots\chi_p} y_{j'} z_1^{\chi_1}\cdots z_p^{\chi_p} \\ &+ \sum_{\substack{\nu_1+\cdots+\nu_n \geqslant 2 \\ \chi_1,\cdots,\chi_p \geqslant 0}} \gamma_{j;\nu_1\cdots\nu_n;\chi_1\cdots\chi_p} x_1^{\nu_1}\cdots x_n^{\nu_n} z_1^{\chi_1}\cdots z_p^{\chi_p}, \quad j = 1, \cdots, n, \end{aligned} \tag{3}$$

证明: 为了使得 n 个形式级数

$$x_j = \sum_{\mu_1+\cdots+\mu_n+\sigma_1+\cdots+\sigma_p \geqslant 1} d_{j;\mu_1\cdots\mu_n;\sigma_1\cdots\sigma_p} y_1^{\mu_1}\cdots y_n^{\mu_n} z_1^{\sigma_1}\cdots z_p^{\sigma_p}, \quad j = 1, \cdots, n, \tag{4}$$

成为 (3) 的一组形式解, 必须而且只需我们有

$$d_{j;\mu_1\cdots\mu_n;\sigma_1\cdots\sigma_p} = Q_{j;\mu_1\cdots\mu_n;\sigma_1\cdots\sigma_p}\ (\gamma, d),$$

其中 Q 表示 $\gamma_{jj';\chi_1\cdots\chi_p}, \gamma_{j;\nu_1\cdots\nu_n;k_1'\cdots k_p'}$ 以及 $d_{j;\lambda_1\cdots\lambda_n;\tau_1\cdots\tau_p}$ 的完全确定的整系数多项式, 而且 $d_{j;\lambda_1\cdots\lambda_n;\tau_1\cdots\tau_p}$ 只有在

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n + \tau_1 + \cdots + \tau_p < \mu_1 + \cdots + \mu_n + \sigma_1 + \cdots + \sigma_p$$

时才出现. 由此导出, 存在 (3) 的一组并且只有一组形式解.

为了证明所得级数收敛, 证明 (3) 有一个下列形状的控制级数:

$$\begin{aligned} X_j = \frac{M}{1 - \dfrac{Z_1 + \cdots + Z_p}{R}} \Bigg\{ & Y_1 + \cdots + Y_n \\ & + \frac{1}{1 - \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{R}} - 1 - \frac{X_1 + \cdots + X_n}{R} \Bigg\}, \end{aligned}$$

其中 M, R 是两个正实常数 (注意: $\dfrac{1}{(1-T_1)\cdots(1-T_n)}$ 的幂级数展式由 $\dfrac{1}{1-(T_1+\cdots+T_n)}$ 的幂级数展式所控制), 并且从而证明: 令 $X_1 = X_2 = \cdots = X_n = X$, 解 X 的二次方程

$$X = \frac{M}{1 - \dfrac{Z_1 + \cdots + Z_p}{R}} \left\{ Y_1 + \cdots + Y_n + \frac{1}{1 - nX/R} - 1 - \frac{nX}{R} \right\}$$

就得到级数 (4) 的一个控制级数. (参看第一章 §2 第 9 段中命题 9.1 的证明.)

一些习题的答案

第一章

3. $P_2 = a_2 b_1^2$, $P_3 = 2a_2 b_1 b_2 + a_3 b_1^3$,

   $P_4 = a_2(2b_1 b_3 + b_2^2) + 3a_3 b_1^2 b_2 + a_4 b_1^4$,

   $P_5 = 2a_2(b_1 b_4 + b_2 b_3) + 3a_3(b_1^2 b_3 + b_1 b_2^2) + 4a_4 b_1^3 b_2 + a_5 b_1^5$.

   $X + \frac{1}{3}X^3 + \frac{2}{15}X^5 + \cdots$

4. a) 无穷大,　　b) 1,　　c) $\inf\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$,

6. 1.

14. (ii) $n\pi/a$, n 为整数.

第三章

17. (i) $x = \frac{2\mathrm{Re}(z)}{1+|z|^2}$, $\quad y = \frac{2\mathrm{Im}\,(z)}{1+|z|^2}$, $\quad u = \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}$.

20. (i) $(\pi(2n-2)!)/(2^{2n-1}[(n-1)!]^2 a^{n-1/2} b^{1/2})$,

    (ii) $\pi(b-a)$,

    (iii) $\pi(e^{-a} - 1/2)$,

    (iv) $\pi a^n/(1-a^2)$, 如果 $|a| < 1$; $\pi/a^n(a^2-1)$, 如果 $|a| > 1$.

23. (ii) $\pi/(n \sin(\alpha+1)\pi/n)$.

25. (i) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{a+bn^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\sqrt{ab}} \coth \pi\sqrt{\frac{a}{b}} - \frac{1}{a}\right)$,

    $$\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^2}{n^4+a^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}a} \frac{\mathrm{sh}\,\pi a\sqrt{2} - \sin\,\pi a\sqrt{2}}{\mathrm{ch}\,\pi a\sqrt{2} - \cos\,\pi a\sqrt{2}},$$

(ii) $\displaystyle\sum_{p\geqslant 1}\frac{1}{x^2-p^2}=\frac{1}{2x}\left(\pi\operatorname{ctg}\pi x-\frac{1}{x}\right).$

第五章

8. $(-1)^n/n!$.

9. $a_6=a_2^2/3,\quad a_8=3a_2a_4/11$.

第六章

7. $w=\gamma z/\sqrt{a^2z^2+\rho^4-a^4}$, 其中根式的分支在$z$为实数时取正实值.

名词索引

F

H

J

K

L

M

P

Q

S

T

W

X

Y

Z

记号索引

(参考数字依次指章、节、段 (或习题号))